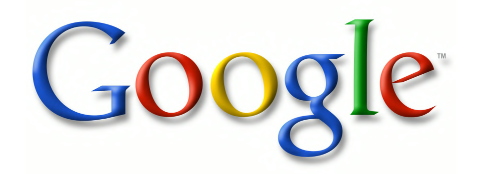







Digitized by Google

Theorie

der

vielfachen Kontinuität.

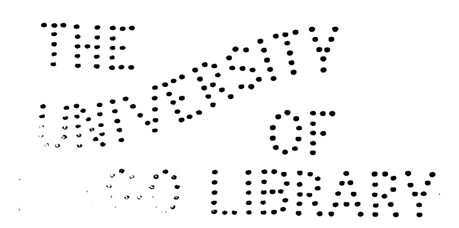
Von

† L. Schläfli.

Herausgegeben im Auftrage der
Denkschriften-Kommission der Schweizer. Naturforschenden Gesellschaft
von
J. H. Graf, Bern.

Separatabdruck aus den Denkschriften der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft.
Band XXXVIII. 1. Hälfte.

Auf Kosten der Gesellschaft und mit Subvention des Bundes
gedruckt von Zürcher & Furrer in Zürich
Kommissions-Verlag von Georg & Co. in Basel, Genève und Lyon.
1901.



Theorie

der

vielfachen Kontinuität.

Von

† L. Schläfli.

Herausgegeben im Auftrage der
Denkschriften-Kommission der Schweizer. Naturforschenden Gesellschaft
von
J. H. Graf, Bern.

Druck von ZÜRCHER & FURRER in Zürich.

Vorbemerkung.

Die vorliegende Abhandlung Ludwig Schläfli's stammt aus den Jahren 1850 bis 1852. Schläfli erwähnt sie zum ersten Mal in seinem Brief an Steiner 3. I. 1852*) und sandte sie, nachdem die Wiener Akademie seine Arbeit „Ueber die Resultante eines Systems mehrerer algebraischer Gleichungen" angenommen und in ihren Denkschriften 1852 publiziert hatte, dem Sekretär dieser Akademie ein. Auf dem Umschlag findet sich von dessen Hand der Vermerk: „655/1852 praes. 8. Okt.". Schläfli bringt im angegebenen Brief noch mehrere Integrale, die wir als Anmerkung zum Brief publiziert haben und spricht die Absicht aus, falls die Akademie die Schrift wegen ihres grossen Umfangs (sie wurde auf 23 Bogen 4^0 geschätzt) nicht annehmen wolle, dieselbe als Privatschrift herauszugeben und bittet Steiner, ihm hiezu in Berlin behülflich zu sein.

Seite 27 des „Briefwechsels" haben wir das Konzept eines Briefes dat. vom Dez. 1851 an den Sekretär der k. k. Akademie der Wissenschaften in Wien publiziert. Dieser Brief sollte denselben über die Absichten des Autors orientieren. Die Aufnahme der Arbeit wurde des grossen Umfangs halber verweigert. Vergeblich ermunterte Steiner (siehe Brief vom 15. Okt. 1853, S. 41 des Briefwechsels, sodann in einem Brief an Schläfli's Freund Prof. Ris und an Schläfli vom 10. März 1854) aus der „Weltüberstürmenden Erdewälzenden" Abhandlung einen Auszug zu machen, der etwa 4 oder 12 Bogen wäre, Schläfli's erste Begeisterung für die Arbeit war vorbei (S. 59). Er sandte sie erst 1854 an Crelle in Berlin, den Herausgeber des Journals für reine Mathematik (siehe S. 74). 1855 liess Steiner Crelle wieder an die Arbeit erinnern (siehe S. 191), dann verwandte sich Steiner erfolglos bei Reimer, dem Verleger des genannten Journals; auch Borchardt, der neue Herausgeber desselben, wollte mithelfen, die Publikation der Arbeit zu ermöglichen. Am 17. Mai 1856 konnte Steiner seinem Freunde L. Schläfli schreiben, dass sich Reimer herbeigelassen habe, die Aufnahme der Arbeit ins Journal,

*) Vergleiche „Der Briefwechsel zwischen Jakob Steiner und Ludwig Schläfli", herausgegeben von J. H. Graf, Mittlgen. der bern. Naturf. Gesellschaft 1896, S. 76 und auch separat bei K. J. Wyss, Bern, S. 20.



2945

sowie 200 Extraabzüge und ein kleines Honorar zu versprechen. Trotzdem sich Schläfli laut Brief vom 19. Mai 1856 sofort, beseelt von dem Wunsch, die Arbeit nach so vielen Jahren endlich einmal veröffentlicht zu sehen, mit allen Bedingungen einverstanden erklärte, da auch die Fortsetzung dazu schon längst geschrieben sei, so unterblieb der Druck doch. Nach einer Aeusserung Steiner's zu schliessen, war nun Borchardt dagegen. Die Arbeit kam wieder nach Bern zurück, wo wir sie unter den nachgelassenen Papieren des grossen Meisters gefunden haben. Das Manuskript gehört wie alle andern von Schläfli stammenden der schweizer. Landesbibliothek in Bern an. Der erste Teil bis Seite 78 trägt Korrekturen, wahrscheinlich von der Hand Crelle's oder Borchardt's, um die Arbeit zum Drucke einzurichten. Sie sind mehr redaktioneller Natur oder beziehen sich auf die Auswahl der Lettern oder die Anordnung. Wir halten aber dafür, die Arbeit soll im ursprünglichen Wortlaut ohne jeden Zusatz oder irgend eine Anmerkung unsererseits gedruckt werden, und sind der Meinung, dass sie nicht bloss historischen Wert, sondern gerade für die Theorie der Geometrie von n Dimensionen noch eine Fülle anregender Gedanken enthalte. Beigegeben wird die Selbstanzeige, dat. 5. Juli 1852, hinzugefügt ist ein Inhaltsverzeichnis. Der Denkschriften-Kommission der Schweiz. Naturforschenden Gesellschaft gebührt der beste Dank, dass sie die Herausgabe des Werkes ermöglicht hat. Herr Prof. Dr. P. Stäckel in Kiel hat die Güte gehabt, die Korrektur ebenfalls durchzusehen, wofür ich ihm an dieser Stelle herzlich danke.

Bern, im Oktober 1901.

Prof. Dr. J. H. Graf.

Anzeige einer Abhandlung über die Theorie der vielfachen Kontinuität.

Die Abhandlung, die ich hier der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften vorzulegen die Ehre habe, enthält einen Versuch, einen neuen Zweig der Analysis zu begründen und zu bearbeiten, welcher, gleichsam eine analytische Geometrie von n Dimensionen, diejenigen der Ebene und des Raumes als spezielle Fälle für $n = 2, 3$ in sich enthielte. Ich nenne denselben Theorie der vielfachen Kontinuität überhaupt in demselben Sinne, wie man z. B. die Geometrie des Raumes eine Theorie der dreifachen Kontinuität nennen kann. Wie in dieser eine Gruppe von Werten der drei Koordinaten einen Punkt bestimmt, so soll in jener eine Gruppe gegebener Werte der n Variabeln $x, y. \ldots$ eine Lösung bestimmen. Ich gebrauche diesen Ausdruck, weil man bei einer oder mehreren Gleichungen mit vielen Variabeln jede genügende Gruppe von Werten auch so nennt; das Ungewöhnliche der Benennung liegt nur darin, dass ich sie auch noch beibehalte, wenn gar keine Gleichung zwischen den Variabeln gegeben ist. In diesem Falle nenne ich die Gesamtheit aller Lösungen die n-fache Totalität; sind hingegen 1, 2, 3, . . . Gleichungen gegeben, so heisst resp. die Gesamtheit ihrer Lösungen $(n-1)$ faches, $(n-2)$ faches, $(n-3)$ faches, . . . Kontinuum. Aus der Vorstellung der allseitigen Kontinuität der in einer Totalität enthaltenen Lösungen entwickelt sich diejenige der Unabhängigkeit ihrer gegenseitigen Lage von dem System der gebrauchten Variabeln, insofern durch Transformation neue Variabeln an ihre Stelle treten können. Diese Unabhängigkeit spricht sich aus in der Unveränderlichkeit dessen, was ich den Abstand zweier gegebener Lösungen $(x, y, \ldots)$, $(x', y', \ldots)$ nenne und im einfachsten Fall durch

$$\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + \text{etc.}}$$

definiere, indem ich gleichzeitig das System der Variabeln ein orthogonales heisse, zum Unterschied von einem schiefen System, worin

$$\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + \text{etc.} + 2\,k\,(x'-x)(y'-y) + \text{etc.}}$$

den Abstand zweier Lösungen darstellte. Indem ich ferner ausschliesslich orthogonale Systeme gebrauche, nenne ich jede lineare Transformation der Variabeln, durch welche die Orthogonalität eines Systems nicht geändert wird, d. h., bei welcher die analytische

Form des Abstandes, Quadratwurzel aus einer Summe von Quadraten, dieselbe bleibt, eine orthogonale Transformation. Sind diese Vorstellungen durchlaufen, so hat man einen Begriff von der Gleichgültigkeit der vielfachen Totalität, ganz ähnlich wie von der des Raumes; man hat gleichsam die Totalität von dem willkürlichen Zwang des zu ihrer Darstellung verwendeten Variabeln-Systems wiederum befreit. Diese Andeutungen, bei denen ich einige Weitläufigkeit nicht wohl vermeiden konnte, mögen genügen, um die Grundlage der hier behandelten Theorie zu bezeichnen.

Die Abhandlung zerfällt in drei Abschnitte, 1. über die linearen, 2. über die sphärischen, 3. über die quadratischen und höheren Kontinuen. Um ohne Weitläufigkeit zu zeigen, dass namentlich in den zwei ersten Abschnitten Dinge vorkommen, welche von der analytischen Geometrie des Raumes aus kaum sich ahnen lassen, führe ich nur den Satz in § 22 an.

Um die Aussage desselben einzuleiten, diene folgende Erklärung. Wenn $p = ax + by + cz + \ldots + hw$, $p' = a'x + b'y + \ldots + h'w$ zwei lineare und homogene Polygone der n orthogonalen Variabeln $x, y, \ldots w$ bezeichnen, und man denkt sich die Gesamtheit aller Lösungen, für welche zugleich $p > o$, $p' > o$: so steht diese zur unbeschränkten Totalität im Verhältnis eines Bruchteils zum Ganzen. Wird 2π als letztes Glied dieses Verhältnisses angenommen, so nenne ich das erste Glied den Winkel der Polynome p, p'. Wird derselbe durch $\angle\,(p, p')$ bezeichnet, so ist

$$-\cos \angle\,(pp') = \frac{aa' + bb' + cc' + \ldots + hh'}{\sqrt{a^2 + b^2 + \ldots + h^2}\ \sqrt{a'^2 + b'^2 + \ldots + h'^2}},$$

wo die Quadratwurzeln im Nenner nur positiv zu verstehen sind.

Ist nun das $n$fache Integral $S_n = \int^n dx\,dy\,dz \ldots dw$ durch die Bedingungen $p_1 > o$, $p_2 > o$, $\ldots\ p_n > o$, $x^2 + y^2 + \ldots + w^2 < 1$ begrenzt, so hängt sein Wert nur von den $\frac{1}{2} n\,(n-1)$ Winkeln zwischen den n linearen und homogenen Grenzpolynomen p ab (wesshalb ich diese Winkel die Argumente der Funktion S_n nenne); und, wenn die transcendente Funktion, als welche der Winkel in Beziehung auf seinen zunächt gegebenen Kosinus aufzufassen ist, nicht mitgezählt wird, so erfordert die Berechnung jenes Integrals nur $\frac{n-2}{2}$- oder $\frac{n-3}{2}$fache Integrationen, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Denn der z. B. nach dem Argument $\angle\,(p_1\,p_2)$ genommene Differentialkoeffizient von S_n ist der $n$te Teil eines ähnlichen, aber bloss $(n-2)$ fachen Integrals S_{n-2}, dessen Argumente durch trigonometrische Relationen mit den ursprünglichen Argumenten verbunden sind. Transformiert man nämlich orthogonal die Variabeln so, dass die Polynome p_1 und p_2 nur die zwei ersten von den neuen Variabeln enthalten, und tilgt dann in allen übrigen Polynomen diese zwei Variabeln, so hat man die $n-2$ Grenzpolynome von S_{n-2}.

Ist die Ordnung n einer Funktion S_n ungerade, so kann man diese linear durch lauter solche Funktionen von gerader Ordnung ausdrücken, deren Argumente geradezu

schon unter den ursprünglichen sich vorfinden. (Hieher gehört es z. B., wenn für $n = 3$ der Inhalt eines Kugeldreiecks nicht eine neue transcendente Funktion erfordert, sondern sich durch die schon der Ebene eigenen Funktionen, nämlich durch die Winkel des Dreiecks, linear ausdrücken lässt.) Nur die Integrale S_n von gerader Ordnung sind demnach eigentümliche transcendente Funktionen.

Man kann ferner jedes Integral S_n auf mannigfaltige Weise als Summe von Integralen derselben Ordnung darstellen, deren Argumente mittels trigonometrischer Relationen aus den ursprünglichen zu berechnen sind. Unter diesen Arten der Zerlegung giebt es auch solche, wo sämtliche Teil-Integrale eine spezielle Beschaffenheit erhalten. Man kann nämlich die Grenzpolynome einer solchen S_n so an einander reihen, dass nur die Winkel zwischen je zwei unmittelbar auf einander folgenden von rechten abweichen, alle übrigen Winkel dagegen rechte sind. Eine so spezialisierte Funktion S_n hat also nur noch $n - 1$ freie Argumente. Da es wünschbar ist, die Zahl der Argumente einer Funktion so sehr als möglich zu vermindern, so richtet sich nun die ganze Aufmerksamkeit auf diese speziellen Funktionen S_n, welche ich Orthoscheme genannt habe. Unter anderem führt die Betrachtung gewisser Perioden solcher Orthoscheme zur Kenntnis einiger Fälle, wo der Wert eines Orthoschems in finiter Form angegeben werden kann. Sollen zugleich alle Argumente rationale Teile des Halbkreises π sein, so glaube ich in der vorliegenden Abhandlung alle Fälle, wo dann auch das Orthoschem zur Polysphäre ein rationales Verhältnis hat, vollständig aufgezählt zu haben. Für $n = 4$ können die Nenner der Argumente nur 3, 4, 5, für alle höheren Dimensionszahlen gar nur 3, 4 sein (das Argument $\frac{\pi}{2}$ ist auszuschliessen, weil es immer auf eine niedrigere Ordnung zurückführt). Der Entscheid, ob alle hieher gehörenden Fälle vollständig aufgezählt sind, scheint ungemein schwierig; aber man wird das Interesse der Frage am besten würdigen, wenn man bedenkt, dass ihr für $n = 2$ die bekannte von Gauss absolvierte Aufgabe der Kreisteilung entspricht.

Was in den zwei ersten Abschnitten gegeben ist, halte ich alles für neu. Anders verhält es sich mit dem dritten Abschnitt. Hier findet die Bestimmung der Hauptaxen eines quadratischen Kontinuums, als analytische Aufgabe betrachtet, sich schon in der Theorie der sekulären Störungen der Planeten, wie sie Laplace in seiner Mécanique céleste gegeben hat. Die Bestimmung des kürzesten Weges auf einem quadratischen Kontinuum findet sich angedeutet von Jacobi in einem Vortrag an die Berliner-Akademie vom Jahre 1839. Dass ich ferner die Frage nach der Existenz orthogonaler Kontinuen aufgeworfen und erörtert habe, war veranlasst durch den von Lamé eingeführten Begriff orthogonaler Flächen. Ob die hier für $n = 3$ gegebene Konstruktion eines ganz beliebigen Systems orthogonaler Flächen schon von Lamé ausgeführt worden ist, weiss ich nicht, da mir die ersten Bände von Lionville's Journal, in denen dieser Gegenstand wahrscheinlich behandelt ist, nicht zu Gebot standen. Die Begriffe des Potentials und des Differentialparameters sind von Gauss und Lamé so benannt und zu physikalischen

Untersuchungen angewandt worden, und mehrere hieher gehörige Sätze von überraschender Eleganz, zum Teil wenigstens, wie es scheint, von Lamé herrührend, hat Lionville in seinen Briefen an Blanchet (über verschiedene das Ellipsoid betreffende analytische und mathematisch-physikalische Fragen, Lionville XI, Juni 1846) mitgeteilt und bewiesen. In der vorliegenden Abhandlung sind auch diese Sätze von drei auf n Dimensionen übergetragen. — Wenn ich nun auch das Verdienst des Generalisierens nur gering anschlage, so hielt ich es doch für nötig, einmal alle diese Betrachtungen in der Theorie der vielfachen Kontinuität zu vereinigen; man wird hier manches Neue finden, was ausser diesem Zusammenhang nicht dargestellt werden konnte.

Ich hoffe, durch die vorliegende Abhandlung faktisch gezeigt zu haben, dass in der reinen Analysis die Konstruktion nicht weniger mit Erfolg angewandt werden kann, als in der Geometrie.

Bern, den 5. Juli 1852.

Dr. L. Schläfli.

Theorie der vielfachen Kontinuität.

Einleitung.

Wenn man die gegenseitige Abhängigkeit zweier Variabeln zur lebhaften Anschauung bringen will, so bedient man sich häufig der ebenen Kurven, indem man jene zwei Variabeln als rechtwinklige Koordinaten setzt, und baut so auf die geometrische Anschauung eine Reihe von Schlüssen, deren letztes Ergebnis eine rein analytische Bedeutung hat. Es wird wohl niemand es bestreiten, dass ein solches Verfahren eben so sicher sein kann, als ein rein analytisches, welches sorgfältig alle der Geometrie entlehnten Ausdrücke vermeidet, und dass in beiden eigentlich dieselben Dinge, nur in anderer Sprache, dargestellt werden; denn es ist gewiss ganz dasselbe, ob man die Funktionsweise, in der zwei Variabeln von einander abhängen, unmittelbar anschaut, oder erst, indem man mit den Augen den Lauf einer gezeichneten Kurve verfolgt. Das durch geometrische Anschauung vermittelte Verfahren hat freilich den Vorzug der leichtern, auch dem Unvorbereiteten sogleich verständlichen Sprache, und kann daher für die populäre Darstellung nur empfohlen werden. Wenn aber die Zahl der in gegenseitiger Abhängigkeit stehenden Variabeln über drei hinausgeht, so bleibt die bequeme Nachhülfe der geometrischen Anschauung und Ausdrucksweise zurück; aber sollte es wohl darum der Analysis versagt sein, aus eigenen Mitteln diesen fühlbaren Mangel zu ersetzen und sich einen Vorrat von Anschauungen und Bezeichnungen anzulegen, worin sie dieselbe leichte Uebersicht der Funktionsweisen und ihrer singulären Eigenschaften wiederfindet, welche sie vorher von der Geometrie entlehnte? Als einen Versuch, nach dieser Seite hin eine neue Bahn in der Analysis zu eröffnen, möchte ich gegenwärtige Abhandlung dem nachsichtigen Urteile des geneigten Lesers übergeben.

Der vorliegende Stoff ist so eingeteilt, wie wenn man etwa in der Geometrie 1. die Gerade und Ebene, 2. den Kreis und die Kugel, 3. die Kurven und Flächen zweiten Grades, 4. endlich die infinitesimalen Eigenschaften der Kurven und Flächen überhaupt, nach einander behandeln würde.

Erster Teil.

Lehre von den linearen Kontinuen.

§ 1. *Definitionen.*

Wenn eine oder mehrere Gleichungen die n Variabeln $x, y, z, \ldots$ enthalten, so nennt man jede Gruppe von Werten dieser letzten, welche allen jenen Gleichungen genügen, eine Lösung des gegebenen Systems. Diese Lösung ist bestimmt, wenn die Zahl der Gleichungen ebenfalls n ist; dagegen wird ein kontinuierlicher Uebergang von einer Lösung zu einer anderen möglich sein, wenn die Zahl der Gleichungen geringer ist; in diesem Falle nenne ich die Gesamtheit aller Lösungen ein Kontinuum, und zwar ein $i$faches, wenn i die Zahl der unabhängigen Variabeln (oder die Dimensionszahl des Kontinuums) ist; ferner ein lineares, wenn alle Gleichungen vom ersten Grade sind, ein höheres, wenn wenigstens eine Gleichung den ersten Grad übersteigt. Ein einfaches Kontinuum überhaupt werde ich Weg, und wenn es insbesondere noch linear ist, Strahl nennen. Unter dem Weg, der zwei Lösungen verbindet, ist die Gesamtheit aller Lösungen zu verstehen, welche von der Anfangs- bis zur Endlösung kontinuierlich auf einander folgen. Da von Kontinuen, welche nur durch eine Gleichung zwischen n Variabeln bestimmt sind, häufiger die Rede sein wird, als von solchen, deren Dimensionszahl zwischen 1 und $n-1$ liegt, so werde ich ein $(n-1)$ faches Kontinuum meist schlechthin Kontinuum nennen, wenn kein Missverständnis zu besorgen ist.

Da einmal das Wort Lösung eine Gruppe von zusammengehörigen Werten der n Variabeln $x, y, \ldots$ bezeichnet, so werde ich dasselbe Wort noch behalten, wenn auch gar keine Gleichung vorliegt; und in diesem Sinne nenne ich die Gesamtheit aller Lösungen die Totalität und zwar $n$fache Totalität, wenn es nötig wird, die Zahl n aller Variabeln $x, y, \cdots$ anzugeben. Sind zwar alle Variabeln unter sich unabhängig, aber dem $n$fachen Integral $\int dx\,dy\,dz \ldots$ Grenzen gesetzt, durch welche keiner Variabeln ein unendliches Wachstum gestattet wird, so nenne ich die Gesamtheit aller Lösungen, über welche sich dieses Integral erstreckt, ein geschlossenes Stück der Totalität und das Integral selbst dessen Mass. Wie geschlossene Stücke eines Kontinuums von beliebiger Dimensionszahl gemessen werden können, wird sich im weiteren Verlaufe zeigen.

Wenn wir nun die Vorstellung von der Kontinuität aller in der $n$fachen Totalität enthaltenen Lösungen von dem speziellen Systeme, vermöge dessen in jeder Lösung die Variabeln gerade diese und keine anderen Werte erhalten, frei zu machen suchen, indem wir uns n Transformationsformeln, durch welche die alten Variabeln in neue übergehen können, denken, so ist es ganz natürlich, dass wir den linearen Transformationen vor allen anderen einen gewissen Vorzug geben. Die allereinfachste lineare Transformation besteht darin, dass man jede alte Variable als Summe einer Konstanten und einer gleichnamigen neuen Variabeln setzt, und durch eine solche Transformation sind wir immer im stande, irgend eine gegebene Lösung als eine erscheinen zu lassen, in der sämtlichen neuen Variabeln der Nullwert zukommt. Wenn wir daher eine Funktion suchen, welche auf die möglichst einfache Weise die Verschiedenheit zweier Lösungen misst, so werden nur die Unterschiede der gleichnamigen Variabeln darin eingehen. Sind diese Unterschiede alle bis auf einen gleich Null, so ist offenbar dieser, absolut genommen, das natürliche Mass der Verschiedenheit beider Lösungen, und überhaupt darf jene Funktion sich nicht ändern, wenn auch ein Unterschied negativ genommen wird, weil die Aenderung des Vorzeichens bei einer Variabeln die Aufeinanderfolge der Lösungen in der Totalität nicht ändert. Es ist ferner natürlich, anzunehmen, dass, wenn alle Unterschiede in demselben Verhältnisse vergrössert werden, auch jene Funktion in demselben Verhältnisse sich vergrössern muss. Die Funktion muss also in Beziehung auf die Unterschiede $x, y, z, \ldots$ der Variabeln homogen und vom ersten Grade sein. Endlich muss noch die Freiheit linearer Transformationen, durch welche die Form dieser Funktion nicht geändert wird, möglichst gross sein. Alle diese Rücksichten zusammen bestimmen uns, $\sqrt{x^2+y^2+z^2+\ldots}$ als Form dieser Funktion anzunehmen, wo die Quadratwurzel immer positiv zu verstehen ist. Wir beginnen demnach die Theorie der vielfachen Kontinuität mit folgender Definition:

Das Quadrat des Abstandes zweier Lösungen ist gleich der Summe der Quadrate der Unterschiede der gleichnamigen Variabeln.

Satz. Wenn drei reelle Lösungen gegeben sind, so giebt es zwischen denselben im ganzen drei Abstände. Die Summe von je zweien derselben kann nie kleiner sein als der dritte.

Beweis. Die Unterschiede der Variabeln seien $a, b, \ldots$, wenn man von der ersten Lösung zur zweiten fortgeht, und $a', b', \ldots$, wenn man von dieser zur dritten fortgeht, dann sind sie $a+a',\ b+b', \ldots$, wenn man von der ersten Lösung zur dritten fortgeht. Werden nun die Abstände mit r, r', r'' bezeichnet, so ist

$$r^2 = a^2+b^2+\ldots, \qquad r'^2 = a'^2+b'^2+\ldots, \qquad r''^2 = (a+a')^2+(b+b')^2+\ldots;$$

folglich

$$r''^2 - r^2 - r'^2 = 2\,(aa'+bb'+\ldots),$$

$$4\,r^2 r'^2 - (r''^2 - r^2 - r'^2)^2 = 4\left\{(ab'-a'b)^2 + \text{etc.}\right\}.$$



Für reelle Lösungen ist also das Produkt

$$(r+r'+r'')\;(-r+r'+r'')\;(r-r'+r'')\;(r+r'-r'')$$

immer positiv. Nehmen wir nun alle drei Abstände als positiv und $r < r' < r''$ an, so sind ausser dem Faktor $r+r'-r''$ alle drei übrigen positiv, folglich muss auch dieser positiv sein, d. h. $r+r' > r''$.

Sollte $r+r' = r''$ werden, so müssten alle Ausdrücke $ab'-a'b$, etc. verschwinden, d. h. es müsste $a:b:c:\ldots = a':b':c':\ldots.$ sein.

Wenn die Unterschiede der Werte zweier Lösungen, einer konstanten A und einer veränderlichen P, proportional wachsen, so durchläuft die Lösung P einen Strahl; denn ihre Werte sind dann Funktionen ersten Grades einer einzigen unabhängigen Variabeln. Es sei B irgend eine von A verschiedene, in jenem Strahl enthaltene Lösung, die wir uns als fest denken. Wenn dann auf demselben Strahl irgend eine Lösung P auf A folgt und vor B vorhergeht, so ist immer der feste Abstand AB gleich der Summe der veränderlichen Abstände AP und PB.

Den Abstand AB denken wir uns daher fortan auch als Mass des Strahls, welchen die Lösung P von A bis nach B durchläuft.

Nehmen wir ausser den Lösungen A, B noch einige andere C, D, E an, welche nicht auf dem Strahle AB liegen, so ist leicht zu zeigen, dass die Summe der hier genannten Abstände grösser ist als der Abstand AB. Es ist nämlich $AC+CD > AD$, $AD+DE > AE$, $AE+EB > AB$, also $AC+CD+DE+EB > AB$. Jene vier Abstände, an einander gereiht, bilden aber ein einfaches Kontinuum, das von A bis B reicht.

Denken wir uns nun die n Variabeln der Lösung P als eben so viele beliebige Funktionen einer Unabhängigen, welche für einen Anfangswert derselben mit den Werten der Lösung A und für einen Endwert mit den Werten der Lösung B zusammenfallen und dazwischen keine Unterbrechung der Kontinuität erleiden, so beschreibt gleichsam die Lösung P einen von A bis B reichenden Weg, und es wird immer möglich sein, auf diesem eine hinreichende Menge von Lösungen P so zu verteilen, dass der Fehler, den man begeht, indem man den zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Lösungen enthaltenen Weg durch ihren Abstand ersetzt, von einer höheren Ordnung wird, als dieser Abstand selbst, den wir uns als verschwindend klein denken. Daraus folgt, dass jener totale Weg AB, wofern er nicht gerade ein Strahl ist, immer grösser sein wird als der von einem Strahle beschriebene Abstand AB.

Sind x, y, ... die Variabeln, dx, dy, ... ihre Differentiale unter der Voraussetzung einer Unabhängigen, so ist $s = \int\sqrt{dx^2+dy^2+\ldots}$ die Länge des Weges, wenn das Integral von der Lösung A bis zur Lösung B reicht. Die Variationsrechnung zeigt, dass dieser Weg ein Minimum wird, wenn die Variabeln Funktionen ersten Grades sind.

§ 2. *Orthogonale Transformation der Variabeln.*

Werden die n Variabeln $x, y, \ldots$ durch solche lineare Funktionen von n neuen Variabeln $t, t', t'', \ldots$ ersetzt, dass der Ausdruck für den Abstand zweier Lösungen seine Form nicht ändert, so soll diese lineare Transformation eine orthogonale heissen.

Da im Ausdrucke für den Abstand r zweier Lösungen nur die Unterschiede ihrer gleichnamigen Werte vorkommen, so sind hier die Konstanten jener linearen Transformationsformeln von keinem Belang; und, wenn man sie weglässt, so sind die Differenzen des ursprünglichen Systems im übrigen dieselben Funktionen der Differenzen des zweiten Systems, wie die Variabeln des ersten von denen des zweiten. Es seien daher $x, y, \ldots$ die Differenzen der ursprünglichen, $t, t', t'', \ldots$ die der neuen Variabeln, oder, was auf dasselbe hinauskommt, $o, o, o, \ldots$ seien in beiden Systemen die Werte der ersten Lösung, $x, y, z, \ldots$ diejenigen der zweiten Lösung im alten, und $t, t' t'', \ldots$ im neuen Systeme. Dann sei

$$\begin{gathered} x = \alpha t + \alpha' t' + \cdots, \\ y = \beta t + \beta' t' + \cdots, \\ \text{etc.}, \end{gathered}$$

so wird

$$r^2 = x^2 + y^2 + \cdots = (\alpha^2 + \beta^2 + \cdots)\, t^2 + \text{etc.} + 2\,(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \cdots)\, tt' + \text{etc.},$$

und wenn $r^2 = t^2 + t'^2 + \text{etc.}$ sein soll, so müssen die Transformationselemente den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \cdots &= 1, \text{ etc.} \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \cdots &= 0, \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

genügen. Es sei

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \alpha \,.\, \alpha' \,.\, \alpha'' \ldots\ldots \\ \beta \,.\, \beta' \,.\, \beta'' \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix},$$

so ist nach einem bekannten Satze:

$$\begin{vmatrix} \Sigma\alpha^2 \,.\, \Sigma\alpha\alpha' \,.\, \Sigma\alpha\alpha'' \ldots \\ \Sigma\alpha'\alpha \,.\, \Sigma\alpha'^2 \,.\, \Sigma\alpha'\alpha'' \ldots \\ \Sigma\alpha''\alpha \,.\, \Sigma\alpha''\alpha' \,.\, \Sigma\alpha''^2 \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} = \varDelta^2,$$

also vermöge jener Bedingungen $\varDelta^2 = 1$, und $\varDelta$ entweder $= -1$ oder $= +1$. Wäre $\varDelta = -1$, so brauchte man nur eine der neuen Variabeln entgegengesetzt zu nehmen, um sogleich $\varDelta = 1$ zu erhalten. Wir wollen daher fortan $\varDelta = 1$ annehmen. Sind nun $a, b, c, \ldots$ die ergänzenden Elemente zu $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, d. h. ist

$$a = \frac{\partial \varDelta}{\partial \alpha}, \quad b = \frac{\partial \varDelta}{\partial \beta}, \quad \text{etc.},$$

so folgt $\Delta t = ax + by + cz + \cdots$, etc. Wenn man aber die Transformationsformeln resp. mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ multipliziert und addiert, so ist vermöge der Bedingungen (1): $t = \alpha x + \beta y + \cdots$, also, wenn $\Delta = 1$ vorausgesetzt wird, $a = \alpha$, $b = \beta$, etc., d. h. die ergänzenden Elemente sind den entsprechenden ursprünglichen gleich. Nun ist überhaupt

$$a\alpha + a'\alpha' + \cdots = \Delta, \text{ etc.},$$
$$a\beta + a'\beta' + \cdots = 0, \text{ etc.},$$

also

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \cdots = 1, \text{ etc.},$$
$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \cdots = 0, \text{ etc.}$$

Mag man also die neuen Variabeln in die alten, oder diese in jene verwandeln, beide Verwandlungen sind durchaus ähnlich.

Die Unterschiede der gleichnamigen Werte zweier Lösungen A, B mögen fortan **Projektionen** ihres Abstandes $AB = r$ heissen. Dann ist in jedem **orthogonalen** Systeme das Quadrat des Abstandes r gleich der Summe der Quadrate seiner Projektionen, und dieser Satz ist als Definition eines orthogonalen Systems zu betrachten. Dann sind auch orthogonale Transformationen solche lineare Transformationen, durch welche irgend zwei orthogonale Systeme in einander übergehen.

Sind die Anfangslösung A und alle n Projektionen des Abstandes r gegeben, so ist dadurch die Endlösung B völlig bestimmt. Ist aber jene Anfangslösung frei und sind nicht die Projektionen selbst, sondern nur ihre $n-1$ Verhältnisse gegeben, so sagen wir, die **Richtung** des Strahls sei bestimmt und nennen jene Projektionen, bei denen es somit nur auf ihre gegenseitigen Verhältnisse ankommt, die **Richtungselemente** dieses Strahls. Werden sämtliche Projektionen durch den Abstand dividiert, so mögen die Quotienten **Richtungscosinus** heissen; diese sind also Projektionen eines auf dem Strahle genommenen Abstandes 1.

Wenn zwei Strahlen **gleiche Richtung** haben, d. h. wenn die Richtungselemente des einen mit denen des andern proportional sind, so mögen sie **parallel** heissen.

Demnach sind die oben gebrauchten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ im alten Systeme die Richtungscosinus derselben Richtung, welche im neuen Systeme durch die Gleichungen $t' = t'' = \cdots = 0$ bestimmt ist u. s. f., und $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ sind im neuen Systeme die Richtungscosinus der im alten durch $y = z = \cdots = 0$ bestimmten Richtung. Die Gleichung $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \cdots = 0$ drückt die **Orthogonalität** der beiden durch t und t' zu bezeichnenden Richtungen aus.

§ 3. *Ueber den Winkel zweier Richtungen.*

Es seien $x, y, z, \ldots$ die Projektionen eines Abstandes r und $x_1, y_1, z_1, \ldots$ diejenigen eines andern r_1, so geben die obigen orthogonalen Transformationsformeln:

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 + \cdots = tt_1 + t't'_1 + t''t''_1 + \cdots.$$

Dieser Ausdruck bleibt also in jedem orthogonalen System immer derselbe. Wir setzen daher

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 + \cdots = rr_1 \cos w$$

und nennen w den Winkel der Richtungen der beiden Abstände r und r_1. Daraus folgt sogleich auch

$$rr_1 \sin w = \sqrt{(xy_1 - x_1 y)^2 + (xz_1 - x_1 z)^2 + \text{etc.}},$$

wo die unter dem Wurzelzeichen stehende Summe sich auf alle Kombinationen zweiter Klasse erstreckt.

Der Cosinus des Winkels zweier Richtungen ist gleich der Summe der Produkte der gleichnamigen Richtungscosinus.

Zwei Richtungen sind orthogonal, wenn die Summe der Produkte ihrer gleichnamigen Projektionen gleich Null ist.

§ 4. *Anwendung der orthogonalen Transformation zum Beweise des Satzes, dass der Strahl der kürzeste Weg sei zwischen zwei auf ihm befindlichen Lösungen.*

Es seien $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Richtungscosinus des gegebenen Strahls, so können immer $n-1$ andere Richtungen gefunden werden, welche mit jenem ein orthogonales System bilden. (Dabei bleiben $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Richtungscosinus frei.) Transformiert man dann die ursprünglichen Variabeln $x, y, \ldots$ in solche $t, t', t'', \ldots$, welche dem neuen System entsprechen, so ist der gegebene Strahl nunmehr dadurch bestimmt, dass nur t variabel bleibt, während $t', t'', \ldots$ konstante Werte erhalten. Ein Stück desselben ist also durch das Integral $\int dt$, irgend ein anderer dieselben Lösungen verbindender Weg dagegen durch das zwischen denselben Grenzen genommene Integral $\int \sqrt{dt^2 + dt'^2 + dt''^2 + \cdots}$ dargestellt. Vergleicht man die Formen beider Integrale, so sieht man unmittelbar, dass dieses grösser ist als jenes. Also ist auch das Integral $\int \sqrt{dx^2 + dy^2 + \cdots}$, zwischen zweien gegebenen Grenzlösungen genommen, ein Minimum, wenn die Variabeln lineare Funktionen einer Unabhängigen sind.

§ 5. *Mass des Paralleloschems.*

Das Mass V einer umschlossenen Totalität ist durch das $n$fache Integral $\overset{n}{\int} dx\,dy\,dz\ldots$ ausgedrückt. Hat nun das $(n-1)$fache Integral $\overset{n-1}{\int} dy\,dz\ldots$ einen konstanten, von x unabhängigen Wert A, und sind die auf x bezüglichen Grenzen zwei konstante Werte,

deren Unterschied a ist, so ist offenbar $V = aA$. Die erste Voraussetzung ist unter anderm erfüllt, wenn eine Grenzgleichung von der Form

$$F(y - p,\ z - q, \ldots.) = 0$$

gegeben ist, wo $p, q, \ldots.$ beliebige Funktionen der einzigen Variabeln x bezeichnen. Es kommen dann nur noch zwei Grenzgleichungen von der Form $x = \text{const.}$ hinzu, und das Integral V wird sich auf alle Werte von x erstrecken, welche zwischen diesen zwei Konstanten liegen. Sind insbesondere $p, q, \ldots.$ lineare Funktionen von x, so wird die durch $F = 0$ bezeichnete Grenze erzeugt durch die Bewegung eines Strahls, welcher stets mit dem durch $y = p, z = q, \ldots.$ bestimmten parallel bleibt. Die geschlossene Totalität V ist dann dem Cylinder der Geometrie zu vergleichen, wo A der Basis, a der Höhe entspricht, und der hier angedeutete allgemeine Satz kann symbolisch so ausgesprochen werden: Das Mass eines Cylinders ist gleich dem Produkte seiner Basis und Höhe.

Wenn nun die Grenze des $(n - 1)$fachen Integrals A (der Basis) wiederum so beschaffen ist u. s. f., so wird zuletzt $V = abc \ldots$ Dann ist x zwischen zwei Konstante, deren Unterschied a, y zwischen zwei lineare Funktionen von x, deren Unterschied b, z zwischen zwei lineare Funktionen von x, y, deren Unterschied c u. s. w. eingeschlossen. Die Totalität wird somit zwischen n Paare von parallelen linearen Kontinuen eingeschlossen; sie heisse Paralleloschem. Wir dürfen immerhin annehmen, dass die Gleichungen für die n Anfangsgrenzen durch die Nullwerte sämtlicher Variabeln befriedigt werden. Nehmen wir je $n - 1$ von diesen linearen Anfangsgleichungen zusammen, so bestimmen sie immer einen Strahl, den wir, durch das weggelassene Paar paralleler linearer Kontinuen begrenzt, Kante des Parallelosehems nennen. Dieses hat im ganzen $n \cdot 2^{n-1}$ Kanten; da aber je 2^{n-1} parallel und gleich lang sind, so zerfallen sie in n Gruppen, von denen wir diejenige fixieren, wo die n Kanten vom Ursprung ausgehen. Von den n Gleichungen, von denen je eine durch ihre Weglassung einer Kante entspricht, ist die erste $x = 0$, die zweite $\alpha x + \beta y = 0$, die dritte $\alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0$ u. s. f. Lässt man die erste weg, so braucht im allgemeinen keine Variable zu verschwinden; lässt man die zweite weg, so bleibt $x = 0$; lässt man die dritte weg, so bleiben $x = 0$, $y = 0$; lässt man die vierte weg, so bleiben $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ u. s. f., d. h. für die erste Kante verschwindet keine Projektion und ihre erste Projektion ist a; für die zweite Kante ist die erste Projektion o, die zweite b; für die dritte Kante sind die erste und zweite Projektion o, die dritte c u. s. f. Wenn also die Projektionen der n Kanten in ein quadratförmiges Schema gebracht werden, so befinden sich darin auf der einen Seite der Diagonale lauter Nullen, und V ist gleich dem Produkt der in die Diagonale fallenden Projektionen, also gleich der Determinante aller Projektionen. Wenn wir nun die Variabeln in ein neues orthogonales System transformieren, so ist die Determinante der alten Projektionen bekanntlich gleich dem Produkt der Determinante der Transformations-

elemente und der Determinante der neuen Projektionen, also (da jene für ein orthogonales neues System gleich 1 ist) gleich dieser. Da aber, wie wir sogleich zeigen werden, für jedes Paralleloschem immer ein orthogonales System von der Beschaffenheit jenes alten gefunden werden kenn, so haben wir den allgemeinen Satz:

Das Mass eines Paralleloschems ist gleich der Determinante der orthogonalen Projektionen seiner Kanten.

Die Projektionen der Kanten eines Paralleloschems in irgend einem orthogonalen Systeme seien $a, b, c, \ldots;\ a', b', c', \ldots;\ a'', b'', c'' \ldots;$ etc. Man soll dieses System in ein neues orthogonales transformieren, zu welchem das Paralleloschem die oben vorausgesetzte Beziehung hat. Denkt man sich sowohl die Kanten als die neuen Variabeln $X, Y, \ldots$ in einer der oben angenommenen entgegengesetzten Ordnung, so sind die Projektionen im gesuchten System:

$$\begin{matrix} A, & o, & o, & o, \ldots \\ A', & B', & o, & o, \ldots \\ A'', & B'', & C'', & o, \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}$$

Es sei ferner

$$\begin{aligned} x &= \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z + \cdots, \\ y &= \beta X + \beta' Y + \beta'' Z + \cdots, \\ & \cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

so hat man

$$\left.\begin{matrix} a = A\alpha \\ b = A\beta \\ \cdots\cdots \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} a' = A'\alpha + B'\alpha' \\ b' = A'\beta + B'\beta' \\ \cdots\cdots\cdots \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} a'' = A''\alpha + B''\alpha' + C''\alpha'' \\ b'' = A''\beta + B''\beta' + C''\beta'' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{matrix}\right| \ldots.$$

Durch die Gleichungen der ersten Vertikalreihe sind

$$A = \sqrt{a^2 + b^2 + \cdots} \text{ und } \alpha = \frac{a}{A},\ \beta = \frac{b}{A}, \ldots.$$

bestimmt. Da das neue System orthogonal sein soll, so liefert die zweite Vertikalreihe

$$A' = a'\alpha + b'\beta + \cdots.$$

und, wenn man nun den gefundenen Wert von A substituiert, auch

$$B' = \sqrt{(a' - A'\alpha)^2 + (b' - A'\beta)^2 + \cdots},\ \alpha' = \frac{a' - A'\alpha}{B'}, \ldots.$$

Die dritte Vertikalreihe giebt

$$A'' = a''\alpha + b''\beta + \cdots,\quad B'' = a''\alpha' + b''\beta' + \cdots$$

und, wenn diese zwei Werte substituiert werden, endlich auch $C'', \alpha'', \beta'', \ldots$ u. s. f.

Jede im Paralleloschem enthaltene Lösung ist durch die Gleichungen

$$x = \lambda a + \lambda' a' + \lambda'' a'' + \cdots,\quad y = \lambda b + \lambda' b' + \lambda'' b'' + \cdots, \text{ etc.}$$

dargestellt, wo die unbestimmten Faktoren $\lambda, \lambda', \lambda'', \ldots$ positive, echte Brüche bezeichnen.

Wird die Determinante $V = \Sigma \pm a b' c'' \ldots$ mit sich selbst multipliziert, so ist das Produkt wiederum gleich einer Determinante, deren Elemente

$$\begin{array}{lll} a^2 + b^2 + c^2 + \cdots, & a a' + b b' + c c' + \cdots, & a a'' + b b'' + c c'' + \cdots, \text{ etc.}, \\ a' a + b' b + c' c + \cdots, & a'^2 + b'^2 + c'^2 + \cdots, & a' a'' + b' b'' + c' c'' + \cdots, \text{ etc.}, \\ & \text{etc.} & \end{array}$$

sind. Bezeichnet man nun die Kanten des Parallelschems mit $k, k', k'', \ldots$ und die von je zweien gebildeten Winkel mit $\angle (kk'), \cdots$, so ist z. B.

$$a^2 + b^2 + \cdots = k^2, \quad a a' + b b' + \cdots = k k' \cos \angle (kk')$$

und man hat

$$V^2 = \begin{vmatrix} k^2 & . \; k k' \cos \angle (kk') & . \; k k'' \cos \angle (kk'') & . \; \ldots \\ k' k \cos \angle (k'k) & . \; k'^2 & . \; k' k'' \cos \angle (k'k'') & . \; \ldots \\ k'' k \cos \angle (k''k) & . \; k'' k' \cos \angle (k''k') & . \; k''^2 & . \; \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

$$= (k k' k'')^2 \times \begin{vmatrix} 1 & . \cos \angle (kk') & . \cos \angle (kk'') & . \; \ldots \\ \cos \angle (k'k) & . \; 1 & . \cos \angle (k'k'') & . \; \ldots \\ \cos \angle (k''k) & . \cos \angle (k''k') & . \; 1 & . \; \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Das Mass des Parallelschems ist also das Produkt aller seiner Kanten, multipliziert mit der Quadratwurzel der Determinante, deren allgemeines Element der Cosinus des Winkels ist, den jede Kante mit jeder Kante bildet.

Ist $V = 0$, so genügen alle Kanten einer und derselben linearen Gleichung, sie fallen in eine und dieselbe Ebene und umgekehrt. Dann muss also auch die Determinante der Cosinus verschwinden. Sind die Winkel, welche $n - 1$ vom Ursprung ausgehenden Strahlen mit einander bilden, beliebig gegeben, und es soll ein $n$ter Strahl in dem durch jene bestimmten linearen Kontinuum liegen, so kennen wir also eine Bedingung, welcher die $n - 1$ Winkel, die dieser mit den übrigen Strahlen bildet, genügen müssen. Setzt man $n = 4$, so passt das Gesagte auf den Fall, wo im Raume vier Strahlen von einem Punkte ausgehen, und die obige Formel liefert uns unmittelbar die Bedingung, welcher die Cosinus der sechs Seiten eines sphärischen Vierecks genügen müssen. Nennen wir drei von einer Ecke ausgehende Seiten a, b, c, ihre Gegenseiten a', b', c', so ist die Bedingung:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & . \cos a & . \cos b & . \cos c \\ \cos a & . \; 1 & . \cos c' & . \cos b' \\ \cos b & . \cos c' & . \; 1 & . \cos a' \\ \cos c & . \cos b' & . \cos a' & . \; 1 \end{vmatrix} = 1 - \sum_6 \cos^2 a + 2 \sum_4 \cos a' \cos b' \cos c' + \sum_3 \cos^2 a \cos^2 a' - 2 \sum_3 \cos a \cos a' \cos b \cos b'.$$

Fällt man aus einem innerhalb eines Tetraeders befindlichen Punkte Senkrechte auf seine Ebenen, so ist jeder von zwei Senkrechten gebildete Winkel das Supplement eines Flächenwinkels des Tetraeders. Man hat also in der letzten Gleichung auch die Bedingung, durch welche die sechs Flächenwinkel eines Tetraeders verbunden sind.

§ 6. *Ueber schiefe Systeme.*

Wenn wir die auf das vorige Paralleloschem bezüglichen Bezeichnungen behalten und

$$x = \frac{at}{k} + \frac{a't'}{k'} + \frac{a''t''}{k''} + \cdots, \quad y = \frac{bt}{k} + \frac{b't'}{k'} + \frac{b''t''}{k''} + \cdots, \text{ etc.}$$

setzen, so stellen diese Gleichungen eine Lösung dar, zu der man vom Ursprung aus auf einem gebrochenen Wege gelangt, der aus den n Abständen $t, t', t'', \ldots$ zusammengesetzt ist, welche resp. mit den Kanten $k, k', k'', \ldots$ des Paralleloschems parallel sind. Denkt man sich die Abstände $t, t', t'', \ldots$ variabel, so repräsentieren sie ein schiefes System. Setzen wir jetzt $r^2 = x^2 + y^2 + \cdots$, so bekommen wir als Abstand irgend einer Lösung $(t, t', t'', \ldots)$ vom Ursprung:

$$r = \sqrt{t^2 + t'^2 + t''^2 + \cdots + 2tt' \cos\angle(kk') + \cdots + 2t't'' \cos\angle(k'k'') + \cdots}.$$

Durch die $\frac{1}{2}n(n-1)$ Cosinus, welche in diesem Ausdruck für einen Abstand r, dessen schiefe Projektionen $t, t', t'', \ldots$ sind, vorkommen, ist die Beschaffenheit des schiefen Systems völlig bestimmt. Wird der Ursprung festgehalten, so ist die Lage eines schiefen Systems durch $n(n-1)$ Data bestimmt, die Lage irgend eines orthogonalen Systems hingegen nur durch $\frac{1}{2}n(n-1)$ Data. Da es nun für die wesentliche Beschaffenheit des schiefen Systems gleichgültig ist, auf welches orthogonale System dasselbe bezogen werde, so hat man diese Zahl von jener abzuziehen, und es bleiben also wirklich nur $\frac{1}{2}n(n-1)$ wesentliche Data für das schiefe System übrig; als solche kann man die Winkel $\angle(kk'), \ldots$, oder die Koeffizienten der Produkte der Variabeln im Ausdruck für das Quadrat des Abstandes r ansehen.

Das Element der Totalität ist im schiefen System ein Paralleloschem, dessen Kanten $dt, dt', dt'', \ldots$ mit den Axen $k, k', k'', \ldots$ parallel sind. Bezeichnen wir die Determinante der Cosinus der Winkel $\angle(kk'), \angle(kk''), \ldots$ mit Δ^2, so ist dieses Element

$$dV = \Delta \,.\, dt\, dt'\, dt'' \ldots.$$

§ 7. *Mass der Pyramide.*

Es ist klar, dass das Integral $P = \Delta \int^n dt\, dt'\, dt'' \ldots$ durch die Bedingungen

$$t > 0,\ t' > 0, \ldots, \frac{t}{k} + \frac{t'}{k'} + \frac{t''}{k''} + \cdots < 1$$

völlig begrenzt ist. Wir nennen ein solches von $n+1$ linearen Kontinuen umschlossenes Integral P eine Pyramide. Setzt man $t = ku$, $t' = k'u'$, $t'' = k''u''$, ..., so wird

$$P = \Delta \, . \, kk'k'' \ldots . \times \int^{n} du\, du'\, du'' \ldots$$

mit den Grenzen $u > 0$, $u' > 0$, $u'' > 0, \ldots$, $u + u' + u'' + \cdots < 1$; da das Integral keine Konstanten enthält, so kann es durch $f(n)$ bezeichnet werden. Die vorletzte Integration:

$$\int^{n-1} du'\, du''\, du''' \ldots \left[u' > 0,\ u'' > 0, \ldots,\ u' + u'' + u''' + \cdots < 1 - u\right].$$

Man setze $u' = (1-u)\,v'$, $u'' = (1-u)\,v''$, etc., so wird

$$\int^{n-1} du'\, du'' \ldots = (1-u)^{n-1} \int^{n-1} dv'\, dv''\, dv''' \ldots \left[v' > 0,\ v'' > 0, \ldots,\ v' + v'' + \cdots < 1\right]$$
$$= (1-u)^{n-1} f(n-1);$$

$$f(n) = f(n=1) . \int_0^1 (1-u)^{n-1}\, du = \frac{f(n-1)}{n} = \frac{1}{1.2.3....n},$$

weil

$$f(1) = \int du \left[u > 0,\ u < 1\right] = 1$$

ist. Es ist also

$$P = \frac{\Delta . kk'k'' \ldots}{1.2.3......n} = \frac{V}{1.2.3......n}.$$

Die Pyramide ist gleich dem Paralleloschem, das mit ihr n von einer Lösung ausgehende Kanten gemein hat, dividiert durch die Permutationszahl

Wir wollen die Aufgabe noch aus einem allgemeineren Gesichtspunkte betrachten. Denken wir uns ein geschlossenes Stück eines linearen Kontinuums, für welches die orthogonale Variable x konstant ist, so können wir sein Mass durch

$$S = \int^{n-1} dy\, dz \ldots$$

ausdrücken, gleich wie wenn es ein Stück einer $(n-1)$fachen Totalität wäre. Die Grenze werde durch den Durchschnitt irgend eines höhern Kontinuums gebildet, dessen Gleichung die Form

$$F\left(\frac{y}{x},\ \frac{z}{x}, \ldots\right) = 0$$

habe. Setzt man nun $y = xu'$, $z = xu''$, ..., so wird

$$S = x^{n-1} \int^{n-1} du'\, du'' \ldots \text{ mit der Grenze } F(u', u'', \ldots) = 0.$$

Bezeichnen wir mit U den Wert des Integrals $\int du'\, du'' \ldots$, welcher offenbar nur durch die Natur der begrenzenden Gleichung $F = 0$ bedingt ist und daher konstant

bleibt, wenn auch x variiert, so haben wir $S = U . x^{n-1}$. Variiert nun x von 0 bis h, so entsteht eine geschlossene Totalität P, begrenzt vom linearen Kontinuum $x = h$ und vom höhern

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots\right) = 0;$$

ihr Mass ist

$$P = U \int_0^h x^{n-1}\, dx = U . \frac{h^n}{n}.$$

Für $x = h$ werde $S = B$, so ist $B = U . h^{n-1}$ und

$$P = \frac{1}{n} h B.$$

Nennen wir nun die geschlossene Totalität P einen Kegel, B seine Basis, den Ursprung Spitze und den orthogonalen Abstand h dieser Spitze vom linearen Kontinuum der Basis B die Höhe, so haben wir den Satz:

Das Mass eines Kegels ist der $n$te Teil des Produkts seiner Basis und Höhe.

Setzt man die Basis wieder als Kegel einer $(n-1)$fachen Totalität voraus u. s. f., so erhält man den frühern speziellern Satz über das Mass der Pyramide.

§ 8. *Mass der Pyramide, ausgedrückt durch ihre $\frac{1}{2} n (n-1)$ Kanten.*

Bezeichnen wir die als Ursprung angenommene Ecke durch o, die übrigen durch $1, 2, \ldots n$ und die von jenem nach diesen gehenden Kanten durch $k_1, k_2, \ldots k_n$, ihre orthogonalen Projektionen durch $a, b, c, \ldots$ mit entsprechenden Zeigern, ferner das Quadrat der Kante, welche die mit den Ziffern λ, μ bezeichneten Ecken verbindet, durch $(\lambda\mu)$, so sind die Projektionen dieser Kante

$$a_\mu - a_\lambda,\ b_\mu - b_\lambda, \ldots, \text{ also } (\lambda\mu) = (a_\mu - a_\lambda)^2 + (b_\mu - b_\lambda)^2 + \text{etc.}$$
$$= k_\mu^2 + k_\lambda^2 - 2 k_\lambda k_\mu \cos \angle\,(k_\lambda k_\mu); \text{ folglich}$$
$$(\lambda\mu) - (o\lambda) - (o\mu) = 2 k_\lambda k_\mu \cos \angle\,(k_\lambda k_\mu),$$

und es wird $(\lambda\lambda) = o$, $(\lambda\mu) = (\mu\lambda)$ sein. Betrachten wir nun eine Determinante Ω, deren allgemeines Element $(\lambda\mu) + \omega$ ist, und wo in jeder Horizontalreihe die Zahl μ und in jeder Vertikalreihe die Zahl λ die Werte $0, 1, 2, 3, \ldots n$ durchläuft und subtrahieren zuerst die Elemente der Horizontalreihe $(\lambda = o)$ von den entsprchenden Elementen aller übrigen Horizontalreihen, so wird in diesen das allgemeine Element $(\lambda\mu) - (o\mu)$. Subtrahieren wir ferner die Elemente der Vertikalreihe $(\mu = o)$ von den entsprechenden Elementen aller

übrigen Vertikalreihen, so wird in diesen das allgemeine Element $(\lambda\mu) - (o\mu) - ((\lambda o) - (oo))$ $= (\lambda\mu) - (o\lambda) - (o\mu) = -2 k_\lambda k_\mu \cos \angle (k_\lambda k_\mu)$, und ω bleibt nur in dem Element $(\lambda = o$, $\mu = o)$ noch übrig. Also ist Ω eine lineare Funktion von ω, in welcher der Koeffizient von ω gleich

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \omega} = (-2)^n \, V^2$$

ist, wenn V^2, wie früher, die Determinante der Elemente $k_\lambda k_\mu \cos \angle (k_\lambda k_\mu)$ bezeichnet, wo sowohl λ als μ die Werte $0, 1, 2, 3, \ldots n$ durchläuft. Also ist

$$V = \sqrt{\frac{1}{(-2)^n} \frac{\partial \Omega}{\partial \omega}}, \text{ und endlich } P = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \sqrt{\frac{1}{(-2)^n} \frac{\partial \Omega}{\partial \omega}}.$$

Für $n = 3$ findet man

$$P = \frac{1}{12} \sqrt{\sum_3 \left[(01) + (23)\right]\left[-(01)(23) + (02)(13) + (03)(12)\right] - \sum_4 (12)(23)(13)}.$$

Wird dieser Ausdruck gleich Null gesetzt, so hat man die Relation, durch welche die Quadrate der sechs Seiten eines Vierecks verbunden sind. Für $n = 4$ ist

$$P = \frac{1}{96} \sqrt{\left\{ \begin{array}{c} \sum\limits_{15} (01)^2 (23)^2 - 2 \sum\limits_{30} (01)^2 (23)(34) - 4 \sum\limits_{10} (01) . (23)(34)(42) \\ - 2 \sum\limits_{15} (01)(12)(23)(30) + \sum\limits_{60} (01)(12)(23)(34) \end{array} \right\}}.$$

(Die unter das Summenzeichen gesetzten Ziffern geben die Zahl der Glieder an, welche jede Summe enthält.) Das Verschwinden dieses letzten Ausdrucks ist die Relation zwischen den Quadraten der zehn Entfernungen von fünf beliebigen Punkten im Raume.

Sind für ein beliebiges n alle $\frac{1}{2} n (n-1)$ Kanten der Pyramide der Einheit gleich, so ist

$$P = \frac{1}{1.2.3\ldots n} \sqrt{\frac{n+1}{2^n}}.$$

§ 9. *Anwendung von § 6 auf die Verwandlung vielfacher Integrale.*

Es sei T eine Funktion der n Variabeln $x, y, z, \ldots$ und $S = \int^n T dx dy dz \ldots$. Man soll dasselbe Integral durch die n neuen Variabeln $t, t', t'' \ldots$ ausdrücken, wenn $x, y, \ldots$ als unter sich unabhängige Funktionen derselben gegeben sind.

Fassen wir $x, y, \ldots$ als Variabeln eines orthogonalen Systems auf, so ist das Produkt $dx\,dy \ldots$ das Element einer von den Integrationsgrenzen umschlossenen Totalität. Wird jedes solche Element mit dem der betreffenden Lösung entsprechenden Werte der Funktion T multipliziert und die Summe aller innerhalb des gegebenen Kontinuums

fallenden Produkte genommen, so hat man das Integral S. Wenn nun die Incremente von T innerhalb der gegebenen Grenzen überall von derselben Ordnung sind, wie die unendlich kleinen Abstände je zweier Lösungen, so steht es offenbar frei, das gegebene Stück der Totalität in Elemente von anderer Form einzuteilen, das Mass eines jeden mit T zu multiplizieren und die Summe aller dieser Produkte zu nehmen. Da der Fehler jedes Produkts von einer höhern Ordnung ist als das Mass des Elements, so wird der Fehler der Summe von einer verschwindend kleinen Ordnung sein und daher das neue Integral mit S zusammenfallen. Wird nun das gegebene Stück der Totalität durch Kontinuen, welche den Gleichungen $t = \text{const.}$, $t' = \text{const.}$, $t'' = \text{const.}, \ldots$ entsprechen, in Elemente zerschnitten, so ist ein solches Element ein schiefes Paralleloschem, dessen erste Kante die Projektionen $\frac{\partial x}{\partial t}\, dt$, $\frac{\partial y}{\partial t}\, dt, \ldots$, die zweite die Projektionen $\frac{\partial x}{\partial t'}\, dt'$, $\frac{\partial y}{\partial t'}\, dt' \ldots$, u. s. f. hat. Sein Mass ist also

$$\left(\Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial t'} \frac{\partial z}{\partial t''} \ldots\right) \times dt\, dt'\, dt'' \ldots,$$

wo die Summe die Determinante der partiellen Differentialkoeffizienten bedeutet. Das Integral verwandelt sich demnach in

$$S = \int T \left(\Sigma \pm \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial t'} \frac{\partial z}{\partial t''} \ldots\right) dt\, dt'\, dt'' \ldots$$

§ 10. *Ueber Polyscheme.*

Wenn das $n$fache Integral $\int^{n} dx\,dy\,dz \ldots$ durch lauter Gleichungen ersten Grades vollständig begrenzt wird, so dass keine der Gleichungen bei der Begrenzung als überflüssig erscheint, so nennen wir die geschlossene Totalität, deren Mass jenes Integral ist, ein Polyschem P_n. Seine Grenzkontinua sind durch jene linearen Gleichungen dargestellt und ihre Zahl kann nicht kleiner als $n+1$ sein. Fixieren wir eines dieser Grenzkontinua, so erscheint es uns, wenn wir nur die in ihm befindlichen Lösungen betrachten, welche zugleich innerhalb jenes Integrals liegen, als ein geschlossenes lineares Kontinuum. Wir können dann das ursprüngliche System immer so orthogonal transformieren, dass eine neue Variable in der ganzen Ausdehnung dieses linearen Kontinuums verschwindet. Mehrere jener ursprünglichen Grenzgleichungen, deren Zahl wenigstens n betragen muss, werden dann in ihrer transformierten (offenbar wieder linearen) Gestalt, wo sie nur die $n-1$ übrigen neuen Variabeln enthalten werden, zur Umschliessung des fixierten Grenzkontinuums dienen. Da eine Variable nun ganz aus der Betrachtung wegfällt, so ist alles wieder so, wie in einer Totalität, aber einer bloss $(n-1)$fachen; das geschlossene Grenzkontinuum hat ein dem ursprünglichen ähnliches Integral, das aber nur $(n-1)$fach ist, zum Mass; innerhalb der von den $(n-1)$ übrigen neuen

Variabeln gebildeten Totalität ist es daher auch ein Polyschem P_{n-1}. Das gegebene P_n ist also wenigstens von $n+1$ P_{n-1} umschlossen, jedes von diesen wenigstens von n P_{n-2} u. s. f. Im allgemeinen schneiden sich drei P_{n-1}, als unbegrenzte lineare Kontinua aufgefasst, erst in einem $(n-3)$fachen, linearen Kontinuum, und wenn sie sich schon in einem $(n-2)$fachen linearen Kontinuum schneiden, so sind ihre Gleichungen nicht mehr unabhängig von einander. Tritt ein solcher spezieller Fall ein, so können doch nicht alle drei (oder mehrere) P_{n-1}, als begrenzte Gebilde aufgefasst, das fragliche P_{n-2} in seiner ganzen Ausdehnung gemein haben; wir zerlegen es dann in Stücke, deren jedes in seiner ganzen Ausdehnung immer nur zweien nachbarlichen P_{n-1} gemein ist.

Wir wollen daher durchweg annehmen, dass ein im Umschluss des P_n vorkommendes P_{n-2} immer nur zweien P_{n-1} und dann in seiner ganzen Ausdehnung gemeinschaftlich sei; hingegen zugeben, dass ein P_{n-3} nicht nur wenigstens dreien, sondern auch mehreren nachbarlichen P_{n-1} gemein sein könne: ein P_{n-4} wenigstens vieren oder auch mehreren P_{n-1} u. s. f.

Wenn keine zwei der P_{n-1}, aus denen der Umschluss eines P_n besteht, sich schneiden, und dasselbe doch eine einzige zusammenhängende Totalität bildet, so nennen wir es nicht überschlagenes Polyschem, im entgegengesetzten Falle ein überschlagenes. Wenn keine innerhalb des gegebenen Polyschems befindliche Lösung dem verlängerten Kontinuum eines seiner Grenz-P_{n-1} angehört, d. h. wenn für sämtliche innerhalb des Polyschems fallende Lösungen das Polynom einer jeden Grenzgleichung immer dasselbe Vorzeichen behält, wenn z. B. alle Polynome stets positiv bleiben, so ist das Polyschem konvex. Durch eine innere Lösung sei ein unbegrenzter Strahl gezogen, so kann auf diesem die Lösung nur nach den zwei entgegengesetzten Richtungen sich fortbewegen; man denke sich die Werte der Lösung fortwährend in den Polynomen aller Grenzgleichungen substituiert. In demselben Augenblicke nun, wo der Wert eines einzigen dieser Polynome ein entgegengesetztes Vorzeichen angenommen hat, ist auch die bewegte Lösung ausserhalb des Polyschems getreten. Das Gleiche gilt für die Bewegung in der entgegengesetzten Richtung. Folglich kann der Umschluss eines konvexen Polyschems von einem Strahl in nicht mehr als zwei Lösungen geschnitten werden.

Wird der Umschluss eines Polyschems P_n, ohne eines der P_{n-1} zu zerbrechen, so in zwei Teile geteilt, dass jeder ein einziges gebrochenes $(n-1)$faches Kontinuum bildet, so soll jeder dieser Teile eine offene polyschematische Figur heissen.

Satz. Wenn unter der Voraussetzung einer $n$fachen Totalität in einem Polyschem oder einer offenen polyschematischen Figur die Zahl der Grenzlösungen mit a_0, die der Grenzstrahlen mit a_1, überhaupt die Zahl der $i$fachen polyschematisch geschlossenen linearen Grenzkontinuen P_i mit a_i bezeichnet wird, und ist endlich $a_n = 1$, wenn ein geschlossenes Polyschem, $a_n = 0$, wenn eine offene polyschematische Figur vorliegt, so ist

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + (-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^n a_n = 1.$$

Beweis. Ich nehme an, der Satz sei für die $(n-1)$fache Totalität schon bewiesen, und bezeichne in der $n$fachen Totalität für irgend eine offene polyschematische Figur die linke Seite der fraglichen Gleichung mit A_n. Wird nun dieser Figur ein neues P_{n-1} angefügt, ohne dass sie dadurch zu einem geschlossenen Polyschem wird, so ist die diesem ganzen geschlossenen P_{n-1} entsprechende Zahl A_{n-1} nach der Voraussetzung gleich 1. Es hat aber mit der anfänglichen Figur eine derselben $(n-1)$fachen Totalität angehörende, offene polyschematische Figur gemein, deren Zahl A_{n-1} ebenfalls gleich 1 ist. Da diese zweite Zahl A_{n-1} schon in der anfänglichen Zahl A_n enthalten ist, so muss sie, bei der Berechnung des Zuwachses von A_n, von der ersten Zahl A_{n-1} abgezogen werden; der Rest ist 0. Die Zahl a_n ist auch jetzt noch 0 wie vorher. Die anfängliche Zahl A_n hat also durch das Anfügen eines neuen P_{n-1} keine Veränderung erfahren. Ist hingegen die anfänglich offene Figur so beschaffen, dass sie durch das Anfügen eines neuen P_{n-1} zu einem geschlossenen Polyschem wird, so verändern sich die Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-2}$ nicht, die Zahl a_{n-1} wächst um 1, und die Zahl a_n geht aus 0 in 1 über. Da aber die Zahlen a_{n-1} und a_n in dem fraglichen Ausdruck mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen sind, so wird auch in diesem Falle der Wert A_n dieses Ausdruckes nicht geändert. Nehmen wir nun nach und nach ein P_{n-1} nach dem andern weg, so dass immer eine offene polyschematische Figur übrig bleibt, so wird diese zuletzt aus einem einzigen P_{n-1} bestehen, und, da ohnehin $a_n = 0$ ist, so wird das entsprechende A_n gleich sein der Zahl A_{n-1} dieses einzigen P_{n-1}, also nach der Voraussetzung gleich 1. Nun ist für $n = 1$ das P_1 ein begrenzter Strahl, also $a_0 = 2$, $a_1 = 1$; folglich $A_1 = a_0 - a_1 = 1$. Der Satz ist somit bewiesen.

§ 11. Berechnung des Masses eines Polyschems.

Durch ein $(n-2)$faches lineares Kontinuum und eine ausserhalb desselben befindliche Lösung kann immer ein $(n-1)$faches lineares Kontinuum, und zwar nur eines, gelegt werden. Denn, wenn jenes durch die zwei simultanen Gleichungen $u = 0$, $v = 0$, wo u, v lineare Funktionen der Variabeln bedeuten, bestimmt ist, so ist jedes durchgehende $(n-1)$fache lineare Kontinuum in der Gleichung $u + \lambda v = 0$, wo λ einen willkürlichen Faktor bezeichnet, enthalten. Soll es aber durch die gegebene Lösung gehen und erhalten für diese die Funktionen u, v resp. die bestimmten Werte p, q, so muss auch $p + \lambda q = 0$ sein. Hiedurch ist λ bestimmt, und man hat $qu - pv = 0$ als Gleichung des verlangten linearen Kontinuums.

Denken wir uns nun das gegebene Polyschem P_n als konvex, wählen innerhalb desselben eine beliebige Lösung und fixieren dann irgend ein P_{n-1} des Umschlusses, so ist auch dieses wieder von vielen P_{n-2} umschlossen, und wir legen durch jedes derselben und jene innere Lösung ein lineares Kontinuum; dann erhalten wir einen polyschematischen Kegel, welcher die Lösung zur Spitze und jenes fixierte P_{n-1} zur Basis hat.

Wird das Polynom der Gleichung dieser Basis für jene Lösung ausgewertet und durch die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der Koeffizienten der Variabeln dividiert, so hat man die Höhe des Kegels gefunden. Kennt man ferner das Mass der Basis P_{n-1}, multipliziert es mit der Höhe und dividiert durch n, so hat man das Mass des Kegels. Da endlich das gegebene Polyschem P_n in lauter solche Kegel zerfällt, so ist sein Mass gleich der Summe der Masse aller dieser Kegel.

Wie die Aufgabe, ein P_n zu berechnen, auf die für ein P_{n-1} zurückgeführt ist, so hängt auch diese wieder von der Berechnung eines P_{n-2} ab u. s. f. Zuletzt hängt alles von der Berechnung eines P_1 oder eines Abstandes ab. Die Berechnung der Höhen und die orthogonalen Transformationen, welche jeweilen zur Wegschaffung einer Variabeln, deren Verschwinden einer Basis entsprechen soll, gemacht werden müssen, erfordern immer eine Ausziehung der Quadratwurzel aus einer Summe von Quadraten, während der Natur der Aufgabe nur rationale Rechnungen wesentlich eignen.

Die Zahl der zu berechnenden Kegel wird geringer, wenn man eine Grenzlösung des P_n zu ihrer gemeinschaftlichen Spitze wählt. Nehmen wir nun an, jede Basis P_{n-1} sei schon in lauter Pyramiden (∞^{n-1}) zerteilt, so ist jede von diesen die Basis einer Pyramide (∞^n), welche jene Grenzlösung zur Spitze hat. Wenn man also überhaupt ein P_{n-1} in lauter Pyramiden zerlegen kann, so ist dieses auch für jedes P_n möglich. Nun kann man aber jedes P_2 oder Vieleck in lauter Pyramiden (∞^2) oder Dreiecke zerlegen, folglich kann auch jedes Polyschem (∞^n) in lauter Pyramiden (∞^n) zerlegt werden. Das Mass einer solchen ist der $1 . 2 . 3 \ldots n$te Teil der Determinante der Projektionen von n ihrer Kanten, die von einer und derselben Ecke ausgehen. Hiedurch ist also die Berechnung des Masses eines Polyschems auf lauter rationale Rechnungen zurückgeführt.

§ 12. *Ueber die Projektionen eines linearen mfachen Kontinuums, wenn m zwischen 1 und n liegt.*

Da das Kontinuum in paralleloschematische Elemente zerlegt werden kann, so wollen wir das Mass S eines Paralleloschems (∞^m) untersuchen, wenn m geringer ist als die Dimensionszahl n der Totalität. Transformieren wir die Variabeln orthogonal, so dass für das gegebene Kontinuum $n - m$ der neuen Variabeln verschwinden, so haben wir es bei der Berechnung des Paralleloschems (∞^m) nur mit den übrigen m Variabeln zu tun. Es gilt also der frühere Satz (§ 5), wenn darin m statt n gesetzt wird. Sind nun $k_1, k_2, \ldots . k_m$ die Kanten des Paralleloschems $_m$, so ist

$$S^2 = \begin{vmatrix} k_1^2 & . \; k_1 k_2 \cos \angle (k_1 k_2) & . \; k_1 k_3 \cos \angle (k_1 k_3) & \ldots . \\ k_2 k_1 \cos \angle (k_2 k_1) \; . & k_2^2 & . \; k_2 k_3 \cos \angle (k_2 k_3) & \ldots . \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} .$$



Sind nun $a_1, b_1, c_1, \ldots$ die n Projektionen von k_1 im ursprünglichen System, so haben wir früher gesehen, dass

$$k_1 k_2 \cos \angle (k_1 k_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + \cdots$$

ist. Bezeichnen jetzt $f, g, h, \ldots$ irgend m der n Projektionen $a, b, c, \ldots$, so ist nach einem bekannten Satze:

$$S^2 = \Sigma \begin{vmatrix} f_1 \cdot g_1 \cdot h_1 \cdot & \ldots \\ f_2 \cdot g_2 \cdot h_2 \cdot & \ldots \\ \cdots & \cdots \\ f_m \cdot g_m \cdot h_m \cdot & \ldots \end{vmatrix}^2,$$

wenn die Summe sich auf alle Kombinationen $fgh\ldots$ ohne Wiederholungen und $m$ter Klasse aus den n Elementen $a, b, c, \ldots$ erstreckt. Jede der $\binom{n}{m}$ Determinanten, aus deren Quadraten diese Summe besteht, nennen wir eine Projektion von S auf das entsprechende $m$fache lineare Kontinuum, für welches alle $n - m$ mit $f, g, h, \ldots$ nichtgleichnamigen ursprünglichen Variabeln verschwinden. Es ist sogleich klar, dass, wenn wir nur die Längen $k_1, k_2, \ldots k_m$ der Kanten, aber nicht ihre Richtungen ändern, sämtliche Projektionen mit S proportional sich verändern werden.

Betrachten wir nun wieder das beliebig umschlossene $m$fache lineare Kontinuum und teilen dasselbe durch Scharen paralleler $(m-1)$facher linearer Kontinuen in unendlich kleine Parallelscheme (∞^m) dS, deren jedes die $\binom{n}{m}$ Projektionen $dP, dP', dP'', \ldots$ hat, so ist $dS^2 = dP^2 + dP'^2 + dP''^2 + \ldots$, und die Verhältnisse $dS : dP : dP' : dP'' : \ldots$ sind konstant. Wenn also S das Mass des $m$fachen Kontinuums, $P, P', P'', \ldots$ seine Projektionen bezeichnen, so ist

$$S^2 = P^2 + P'^2 + P''^2 + \cdots,$$

d. h. das Mass irgend eines geschlossenen linearen $m$fachen Kontinuums ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate seiner $\binom{n}{m}$ Projektionen.

Wenn $1 < m < n - 1$ ist, so sind die $\binom{n}{m}$ Projektionen nicht unter sich unabhängig. Man kann nämlich die Gleichungen des linearen $m$fachen Kontinuums immer so darstellen, dass $n - m$ Variabeln als lineare Funktionen der m übrigen erscheinen. In jeder von diesen sind m Koeffizienten der Variabeln und noch eine freie Konstante gegeben; die letzte zählen wir nicht, als ohne Einfluss auf die Richtung des $m$fachen Kontinuums. Diese Richtung wird also im ganzen durch $(n - m)\, m$ Data hinreichend bestimmt. Setzen wir jetzt Projektionen, so kommt ausser der Richtung noch das Mass des projizierten Kontinuums als neues Datum hinzu. Also sind unter den $\binom{n}{m}$ Projektionen nur $(n - m)\, m + 1$ unter sich unabhängig, alle übrigen aber sind durch diese bestimmt.

Die zwei angeführten Zahlen ändern sich nicht, wenn man m mit $n - m$ vertauscht; wir dürfen also $m \overline{\overline{<}} \frac{1}{2} n$ voraussetzen. Betrachten wir nun den Bruch

$$\frac{n}{2m} \cdot \frac{n-1}{n-m} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} \cdot \dots\dots \frac{n-m+1}{m},$$

so sind seine Faktoren

$$\frac{n}{2m} \overline{\overline{>}} 1, \; \frac{n-1}{n-m} > 1, \; \frac{n-2}{3} > 1, \; \dots \frac{n-m+1}{m} > 1;$$

der Bruch ist also grösser als $\frac{n-1}{n-m}$, und, wenn wir mit $(n-m)m$ multiplizieren,

$$\binom{n}{m} > (n-1)m = (n-m)m + m(m-1),$$

also, da $m > 1$ vorausgesetzt ist, auch

$$\binom{n}{m} > (n-m)m + 1.$$

(Für $m = 1$ oder $m = n - 1$ hingegen wird jede der zwei hier verglichenen Zahlen gleich n. Also kann erst für $n \overline{\overline{>}} 4$ der Fall eintreten, dass nicht alle Projektionen unter sich unabhängig sind.)

Es seien nun $a, b, c, \dots e$ die Zeichen für irgend $m + 1$ Projektionen einer Kante k jenes $m$fachen Paralleloschems; $f, g, h, \dots$ die Zeichen für $m - 1$ Projektionen derselben Kante; nur darf die Kombination $(m-1)$ter Klasse, $f, g, h \dots$, weder eine aus den Elementen $b, c, \dots . e$ gebildete sein, noch das Element a enthalten. Dann sei die Determinante

$$\begin{vmatrix} a & .b & .c & \dots\dots & e \\ a_1 & .b_1 & .c_1 & \dots\dots & e_1 \\ . & . & . & \dots\dots & . \\ a_m & .b_m & .c_m & \dots\dots & e_m \end{vmatrix} = aA + bB + cC + \dots + eE,$$

wo $a, b, c, \dots e$ willkürliche Grössen bezeichnen, während die mit Zeigern versehenen Buchstaben gegebene Projektionen von Kanten bedeuten; es wird also sein;

$$\begin{aligned} a_1 A + b_1 B + c_1 C + \dots + e_1 E &= 0, \\ a_2 A + b_2 B + c_2 C + \dots + e_2 E &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_m A + b_m B + c_m C + \dots + e_m E &= 0. \end{aligned}$$

Ferner sei

$$\begin{vmatrix} a_1 . f_1 . g_1 . h_1 . \dots . \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_m . f_m . g_m . h_m . \dots . \end{vmatrix} = \mathfrak{A}, \quad \begin{vmatrix} b_1 . f_1 . g_1 . h_1 . \dots . \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ b_m . f_m . g_m . h_m . \dots . \end{vmatrix} = \mathfrak{B}, \text{ etc.}$$

Man sieht nun leicht, mit welchen Faktoren man die m Gleichungen des vorigen Systems multiplizieren muss, um die Gleichung

$$\mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C + \cdots + \mathfrak{E}E = 0$$

zu erhalten, welche eine der gesuchten Relationen zwischen den $\binom{n}{m}$ Projektionen von S darstellt. Wir wollen nun diese Relationen so zu ordnen suchen, dass es klar wird, wie viele Projektionen P unabhängig sind, und wie alle übrigen aus diesen berechnet werden können.

Lassen wir vorerst die von den mit a bezeichneten Elementen abhängigen Projektionen P weg und denken uns die wesentlichen Relationen zwischen den übrigen schon aufgestellt und mittelst derselben diese alle berechnet. Denken wir uns nun $B, C, \ldots . E$, an Zahl m Projektionen (mit a) willkürlich gegeben und bilden dann aus den $n-1$ Elementen $b, c, \ldots$ alle Kombinationen $(m-1)$ter Klasse, $f, g, h \ldots$, mit Ausschluss der aus den m Elementen $b, c, \ldots e$ zu bildenden, so sind die entsprechenden $\mathfrak{A}$ durch obige Relation immer in Funktion der m unabhängigen $B, C, \ldots E$ gegeben. Alle jene $\mathfrak{A}$, mit diesen $B, C, \ldots E$ zusammen, sind aber sämtliche $\binom{n-1}{m-1}$ Determinanten, worin der Buchstabe a vorkommt, und unter diesen sind also höchstens m unabhängige. Ebenso kann man zeigen, dass unter allen Determinanten, worin a fehlt, aber b vorkommt, höchstens m unabhängige sind; ebenso unter denen, worin a, b fehlen, aber c vorkommt u. s. f. Endlich gelangen wir zu den Determinanten, worin die $n-m-1$ ersten Buchstaben fehlen und der $(n-m)$te vorkommt; ihre Zahl ist offenbar m. Zuletzt ist noch eine Deserminante, diejenige, worin die m letzten Buchstaben vorkommen, übrig. Wir bekommen so offenbar höchstens $(n-m)\,m+1$ unabhängige Projektionen. Der Natur der Sache nach müssen aber gerade so viele sein, wie wir vorhin gesehen haben. Folglich haben wir auch alle wesentlichen Relationen aufgezählt.

Sind $\binom{n}{m}$ Projektionen, welche diesen Relationen genügen, beliebig gegeben, so ist es leicht, die $n-m$ Gleichungen eines entsprechenden linearen Kontinuums zu finden, das z. B. durch den Ursprung gehen möge. Es seien $x, y, \ldots z$ die m ersten Variabeln, $u, v, w, \ldots$ die übrigen und

$$u = e_1 x + e_2 y + \cdots + e_m z, \quad v = f_1 x + f_2 y + \cdots + f_m z, \text{ etc.}$$

die $n-m$ gesuchten Gleichungen des linearen Kontinuums. Dann sind die in dem Schema

$$\left\| \begin{matrix} 1 . 0 . 0 \ldots . 0 . e_1 . f_1 . g_1 . \;\ldots . \\ 0 . 1 . 0 \ldots . 0 . e_2 . f_2 . g_2 . \;\ldots . \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 . 0 . 0 \ldots . 1 . e_m . f_m . g_m . \;\ldots . \end{matrix} \right\|$$

enthaltenen $\binom{n}{m}$ Determinanten den Projektionen des Kontinuums proportional. Da nun

die Verhältnisse dieser gegeben sind und unter jenen $(n-m)m+1$ sich finden, denen die Werte

$$1;\ e_1, f_1, g_1, \ldots;\ e_2, f_2, \ldots;\ \ldots\ldots;\ e_m, f_m, \ldots$$

zukommen, so sind diese Werte bekannt.

§ 13. *Mass eines mfachen höheren Kontinuums.*

Die n Variabeln $x, y, z, \ldots$ eines orthogonalen Systems seien in Funktion von m unabhängigen Variabeln $t, t', t'', \ldots$ gegeben. Wenn durch keine Transformation dieser unabhängigen Variabeln jene $x, y, z, \ldots$ als lineare Funktionen erscheinen, so nennen wir das durch die n Gleichungen dargestellte $m$fache Kontinuum ein höheres. Es wird durch m Scharen von $(m-1)$fachen Kontinuen, welche den Gleichungen $t=$ const., $t'=$ const., $t''=$ const. etc. entsprechen, in paralleloschematische Elemente zerschnitten. Die Kante, welche der Variation des einzigen t entspricht, hat die Projektionen

$$\frac{\partial x}{\partial t}\,dt,\ \frac{\partial y}{\partial t}\,dt,\ \frac{\partial z}{\partial t}\,dt, \ldots\ldots,$$

u. s. f. Das Mass des Elements wird also erhalten, wenn man die Quadratwurzel aus aus der Summe der Quadrate der $\binom{n}{m}$ in dem Schema

$$\left\|\begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \cdot \ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial x}{\partial t'} \cdot \frac{\partial y}{\partial t'} \cdot \frac{\partial z}{\partial t'} \cdot \ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial x}{\partial t''} \cdot \frac{\partial y}{\partial t''} \cdot \frac{\partial z}{\partial t''} \cdot \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\|$$

enthaltenen Determinanten mit $dt\,dt'\,dt''\ldots$ multipliziert. Integriert man endlich dieses Produkt innerhalb der gegebenen Grenzen, so erhält man das Mass des geschlossenen höheren Kontinuums.

Man kann die Gleichungen des Kontinuums so transformieren, dass die m ersten Variabeln $x, y, \ldots z$ als unabhängige und die $n-m$ übrigen $u, v, w, \ldots$ als Funktionen jener erscheinen. Das vorige Schema erscheint dann in folgender einfacheren Gestalt:

$$\left\|\begin{array}{l} 1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \ldots\ldots 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \ldots\ldots \\ 0 \cdot 1 \cdot 0 \cdot \ldots\ldots 0 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \ldots\ldots 1 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \ldots\ldots \end{array}\right\| \quad .$$

Ist $m = 2$, so wird

$$S = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \text{etc.} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \text{etc.}}\; dx\,dy$$

das Mass des Kontinuums. Ist $m = n - 1$ und sind $x, y, \ldots z$ die unabhängigen, u die letzte und einzige abhängige Variable, so wird

$$S = \overset{n-1}{\int} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\; dx\,dy \ldots dz$$

das Mass des Kontinuums.

§ 14. *Orthogonale Transformation der Projektionen eines linearen Kontinuums.*

Was in Beziehung auf Verhältnisse der Projektionen für ein parelleloschematisches Stück eines $m$fachen linearen Kontinuums gilt, ist auch auf ein beliebig umschlossenes Stück desselben auszudehnen. Wir denken uns daher ein Paralleloschem, dessen Kanten die Projektionen

$$a, b, \ldots. c, d, e, f, \ldots.,$$

versehen, mit den Nummern $1, 2, 3, \ldots m$ der Kanten als untern Zeigern haben. Es sei $ab \ldots c$ irgend eine Kombination $m$ter Klasse aus den n Elementen $a, b, \ldots. c, d, e, f, \ldots$, so entspricht denselben die Kontinuumsprojektion

$$P = \Sigma \pm a_1\, b_2 \ldots c_m.$$

Die orthogonalen Transformationsformeln seien nun

$$\begin{aligned}
x &= \alpha t + \alpha' t' + \alpha'' t'' + \cdots, \\
y &= \beta t + \beta' t' + \beta'' t'' + \cdots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z &= \gamma t + \gamma' t' + \gamma'' t'' + \cdots, \\
u &= \delta t + \delta' t' + \delta'' t'' + \cdots, \\
v &= \varepsilon t + \varepsilon' t' + \varepsilon'' t'' + \cdots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Die Projektionen der Kanten des $m$fachen Paralleloschems im neuen Systeme seien $h, h', h'', \ldots$, versehen mit den untern Zeigern $1, 2, \ldots m$, entsprechend den Nummern der Kanten. Dann ist

$$P = \left\| \begin{array}{c|c} \alpha\,.\,\alpha'\,.\,\alpha''\,\ldots. & h_1\,.\,h_1'\,.\,h_1''\,\ldots. \\ \beta\,.\,\beta'\,.\,\beta''\,\ldots. & h_2\,.\,h_2'\,.\,h_2''\,\ldots. \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \gamma\,.\,\gamma'\,.\,\gamma''\,\ldots. & h_m\,.\,h_m'\,.\,h_m''\,\ldots. \end{array} \right\|,$$

welches Schema eine Determinante bedeutet, deren allgemeines Element die Summe der Produkte der gleichaccentigen Glieder irgend einer Horizontalreihe links und irgend einer rechts vom mittleren Vertikalstrich ist. Es ist bekannt, dass diese Determinante gleich ist der Summe der $\binom{n}{m}$ Produkte von je zwei homologen Determinanten, welche jedes der beiden durch den mittleren Vertikalstrich geschiedenen Schemate liefert. Die Determinanten, welche das Schema rechts liefert, sind aber die Projektionen des m-fachen Paralleloschems im neuen System, und die homologe Determinante im Schema links ist der Faktor, mit dem man das $m$fache lineare Kontinuum $(tt' \ldots)$, auf welches diese einzelne Projektion gefällt wurde, und dem sie angehört, multiplizieren muss, um seine Projektion auf das axiale Kontinuum $(xy \ldots z)$ des ursprünglichen Systems $(xy \ldots zuvw \ldots)$ zu erhalten. Man kann daher die Transformation auch so darstellen.

Im ursprünglichen System $(xy \ldots zuvw \ldots)$ wird ein durch die m Variabeln $(xy \ldots z)$ bestimmtes axiales Kontinuum fixiert. Im neuen System $(tt't'' \ldots)$ denkt man sich alle axialen $m$fachen Kontinua und projiziert auf diese das gegebene geschlossene lineare $m$fache Kontinuum S; dann werden alle diese Projektionen wiederum auf das fixierte ursprüngliche axiale Kontinuum $(xy \ldots z)$ projiziert; die Summe dieser letzten Projektionen wird gleich sein der Projektion von S.

Irgend eine aus der linken Hälfte des obigen Schemas entnommene Determinante kann auch aufgefasst werden als Projektion eines Stückes des axialen Kontinuums $(xy \ldots z)$ vom Masse 1 auf das mit der Determinante homologe axiale Kontinuum des neuen Systems. Ersetzen wir das Mass 1 durch T, so haben wir nach dieser Auffassung folgenden Satz:

Wenn in der $n$fachen Totalität ein orthogonales Axensystem und irgend zwei lineare $m$fache Kontinua S und T gegeben sind, so ist die Projektion von S auf T, multipliziert mit T, gleich der Summe der Produkte der Projektionen von S und T auf je eines und dasselbe axiale mfache Kontinuum des orthogonalen Systems.

Es ist also klar, dass man im Subjekte dieses Satzes auch S und T vertauschen darf, ferner, dass der Wert des Prädikats vom gewählten orthogonalen System unabhängig ist. Wir können ihn daher mit $ST \cos \angle (ST)$ bezeichnen.

Wir wollen noch die Beziehung eines linearen $m$fachen Kontinuums S zu einem schiefen System betrachten. Fixieren wir in diesem irgend ein axiales $m$faches Kontinuum C_1, um S darauf zu projizieren, so müssen wir in allen Lösungen von S die Werte der $n - m$ Variabeln, welche in C_1 verschwinden, durch Null ersetzen. Das geschlossene in C_1 fallende Kontinuum aller so veränderten Lösungen ist die Projektion P_1 von S auf C_1. Es ist sogleich klar, dass der Wert von P_1 nur von den Richtungen der $n - m$ nicht in C_1 fallenden Axen des schiefen Systems, aber nicht von den m Axen, durch welche C_1 gelegt ist, abhängt. Nehmen wir S als $m$faches Paralleloschem

an und bilden die Determinante D_1 der Projektionen seiner Kanten auf die in C_1 liegenden Axen, ferner die Determinante Θ_{11} der Kosinus der Winkel, welche jede dieser m Axen mit jeder bildet, so ist $P_1 = D_1 \sqrt{\Theta_{11}}$. Es sei C_2 ein anderes axiales m-faches Kontinuum des schiefen Systems, $P_2 = D_2 \sqrt{\Theta_{22}}$, und Θ_{12} die Determinante der Kosinus der Winkel, welche jede der Axen von C_1 mit jeder von C_2 bildet, so ist

$$S^2 = D_1^2\,\Theta_{11} + D_2^2\,\Theta_{22} + \ldots + 2\,D_1\,D_2\,\Theta_{12} + \ldots + 2\,D_2\,D_3\,\Theta_{23} + \ldots$$

$$= P_1^2 + P_2^2 + \ldots + 2\,P_1\,P_2 \frac{\Theta_{12}}{\sqrt{\Theta_{11}\,.\,\Theta_{22}}} + \ldots,$$

welche Summe $\frac{1}{2}\binom{n}{m}\left\{\binom{n}{m}+1\right\}$ Glieder zählt. Aus dem für ein orthogonales System Gesagten ist klar, dass

$$\Theta_{12} = \sqrt{\Theta_{11}}\,.\,\sqrt{\Theta_{22}}\,.\cos\angle\,(C_1\,C_2)$$

ist. Man kann also setzen:

$$S^2 = P_1^2 + P_2^2 + \ldots + 2\,P_1\,P_2\cos\angle\,(C_1\,C_2) + \ldots.$$

Man bemerke die vollständige Analogie dieser Formel mit derjenigen für einen Abstand im schiefen System.

Sind $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots$ die n Richtungskosinus der ersten Axe in C_1, u. s. f. mit den unteren Zeigern $1, 2, \ldots m$, ferner $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ (mit den unteren Zeigern $1, 2, \ldots m$) die m Gruppen von je n Richtungskosinus der Axen in C_2 (alle Richtungskosinus beziehen sich auf ein orthogonales System), so ist

$$\sqrt{\left\|\begin{array}{c|c}\alpha_1\,.\,\beta_1\,.\,\gamma_1\ldots\ldots & \alpha_1\,.\,\beta_1\,.\,\gamma_1\ldots\ldots\\ \alpha_2\,.\,\beta_2\,.\,\gamma_2\ldots\ldots & \alpha_2\,.\,\beta_2\,.\,\gamma_2\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\\ \alpha_m\,.\,\beta_m\,.\,\gamma_m\ldots\ldots & \alpha_m\,.\,\beta_m\,.\,\gamma_m\ldots\ldots\end{array}\right\|} \times \sqrt{\left\|\begin{array}{c|c}\alpha_1'\,.\,\beta_1'\,.\,\gamma_1'\ldots\ldots & \alpha_1'\,.\,\beta_1'\,.\,\gamma_1'\ldots\ldots\\ \alpha_2'\,.\,\beta_2'\,.\,\gamma_2'\ldots\ldots & \alpha_2'\,.\,\beta_2'\,.\,\gamma_2'\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\\ \alpha_m'\,.\,\beta_m'\,.\,\gamma_m'\ldots\ldots & \alpha_m'\,.\,\beta_m'\,.\,\gamma_m'\ldots\ldots\end{array}\right\|} \times \cos\angle(C_1 C_2)$$

$$= \left\|\begin{array}{c|c}\alpha_1\,.\,\beta_1\,.\,\gamma_1\ldots\ldots & \alpha_1'\,.\,\beta_1'\,.\,\gamma_1'\ldots\ldots\\ \alpha_2\,.\,\beta_2\,.\,\gamma_2\ldots\ldots & \alpha_2'\,.\,\beta_2'\,.\,\gamma_2'\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\\ \alpha_m\,.\,\beta_m\,.\,\gamma_m\ldots\ldots & \alpha_m'\,.\,\beta_m'\,.\,\gamma_m'\ldots\ldots\end{array}\right\|$$

§ 15. Ueber das Verhalten linearer Kontinua zu einander.

Sind in der $n$fachen Totalität zwei lineare Kontinua, ein $m$faches und ein m'-faches, gegeben, so hat man im ganzen $2\,n - (m + m')$ Gleichungen; die beiden Kontinua werden also im allgemeinen nur dann sich schneiden, wenn $m + m' \gtreqless n$ ist. Ist z. B. $m + m' = n$, so haben sie im allgemeinen nur eine Lösung gemein, einen Strahl, wenn $m + m' = n + 1$, u. s. f. Wenn dagegen $m + m' < n$ ist, so können im allgemeinen die beiden Kontinua keine Lösung gemein haben. Handelt es sich nur um die Ver-

gleichung ihrer Richtungen, und legt man daher mit jedem derselben ein Kontinuum parallel durch den Ursprung, so bestimmen diese zusammen ein $(m+m')$faches Kontinuum. Man kann das System orthogonal transformieren, sodass $n-(m+m')$ neue Variabeln für dieses lineare Kontinuum verschwinden, und dann dieses wie eine $(m+m')$-fache Totalität betrachten, in welcher jenes $m$fache und m'fache lineare Kontinuum gegeben sind. Der Fall $m+m'<n$ ist somit auf den Fall $m+m'=n$ zurückgeführt.

Um der ferneren Erörterung dieses Gegenstandes die gehörige Deutlichkeit geben zu können, muss ich den Begriff normaler Kontinuen einführen. Sind $x, y, \ldots$ die Projektionen eines dem $m$fachen linearen Kontinuum C angehörenden Strahls r, und $x', y', \ldots$ diejenigen irgend eines Strahls r', für welchen $xx'+yy'+\ldots=0$ ist, bleibt ferner die Lage des ersten Strahls r innerhalb des Kontinuums C völlig frei, so sind sämtliche vom Ursprung ausgehende Strahlen r' in einem $(n-m)$fachen linearen Kontinuum C' enthalten. Nun, zwei solche Kontinuen C und C' nenne ich normal.

Sind $t_1, t_2, \ldots t_m$ die Variabeln eines beliebigen in C angenommenen schiefen Systems, und demgemäss

$$x=\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2+\ldots+\alpha_m t_m,$$
$$y=\beta_1 t_1+\beta_2 t_2+\ldots+\beta_m t_m,$$
etc.

die orthogonalen Projektionen eines Strahls r, dessen schiefe $t_1, t_2, \ldots t_m$ sind, so verwandelt sich die obige Bedingung $xx'+yy'+\ldots=0$ für den Strahl r' in

$$(\alpha_1 t_1+\alpha_2 t_2+\ldots+\alpha_m t_m)x'+(\beta_1 t_1+\beta_2 t_2+\ldots+\beta_m t_m)y'+\ldots=0$$

und zerfällt, da $t_1, t_2, \ldots t_m$ frei bleiben sollen, in die m Gleichungen

$$\alpha_i x'+\beta_i y'+\ldots=0, \ (i=1,2,3,\ldots m).$$

Diese stellen ein $(n-m)$faches lineares Kontinuum C' dar, welches wir das normale nennen.

Ich behaupte nun, dass, wenn C, C' als geschlossen gedacht werden, die Projektionen des einen mit denen des andern proportional sind. Um dieses zu beweisen, teile ich die n Variabeln $x', y', \ldots$ in zwei Gruppen, von denen die eine aus den m Variabeln $x', y', \ldots z', u'$, die andere aus den $n-m$ Variabeln $v', w', \ldots p', q'$ besteht.

Eliminiert man nun aus den m Gleichungen

$$(a)\quad \alpha_i x'+\beta_i y'+\ldots+\gamma_i z'+\delta_i u'+\varepsilon_i v'+\ldots+\zeta_i p'+\eta_i q'=0, \ [i=1,2,\ldots m]$$

die $m-1$ ersten Variabeln $x', y', \ldots z'$, so wird man die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \,.\, \beta_1 \ldots \gamma_1 \,.\, (\delta_1 u'+\varepsilon_1 v'+\ldots+\zeta_1 p'+\eta_1 q') \\ \alpha_2 \,.\, \beta_2 \ldots \gamma_2 \,.\, (\delta_2 u'+\varepsilon_2 v'+\ldots+\zeta_2 p'+\eta_2 q') \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_m \,.\, \beta_m \ldots \gamma_m \,.\, (\delta_m u'+\varepsilon_m v'+\ldots+\zeta_m p'+\eta_m q') \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\Delta u'+E v'+\ldots Z p'+H q'=0$$

erhalten. Es seien $n - m$ unter sich unabhängige Lösungen des Systems (a), nämlich $x' = \alpha_k, y' = \beta_k, \ldots [k = m + 1, m + 2, \ldots n - 1, n]$ bekannt, so ist auch

$$\begin{aligned} \delta_{m+1} \varDelta + \varepsilon_{m+1} E + \ldots + \zeta_{m+1} Z + \eta_{m+1} H &= 0, \\ \delta_{m+2} \varDelta + \varepsilon_{m+2} E + \ldots + \zeta_{m+2} Z + \eta_{m+2} H &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_n \varDelta + \varepsilon_n E + \ldots + \zeta_n Z + \eta_n H &= 0. \end{aligned}$$

Folglich sind die $m$fachen Determinanten $\varDelta, E, \ldots H$ proportional mit den $(n - m)$-fachen, welche aus den Koeffizienten $\delta, \varepsilon, \ldots \eta$ der $n - m$ letzten Gleichungen gebildet werden können; z. B. $\varDelta = \Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \ldots \gamma_{m-1} \delta_m$ ist proportional mit $\Sigma \pm \varepsilon_{m+1} \varsigma_{m+2} \ldots \zeta_{n-1} \eta_n$, u. s. f. Die Zahl der proportionalen Glieder in jeder der beiden Reihen ist hier freilich nur $n - m + 1$; aber, wie man leicht sieht, kann man sie bis auf $\binom{n}{m}$ bringen, wenn man nach und nach immer andere Gruppen von je $m - 1$ Variabeln aus dem System (a) eliminiert. Den soeben gefundenen Satz kann man nun so aussprechen:

Wenn im Schema einer $n$fachen Determinante die Kombination jeder der m ersten Horizontalzeilen mit jeder der $n - m$ letzten eine verschwindende Produktensumme liefert, z. B.

$$\alpha_i \alpha_k + \beta_i \beta_k + \ldots + \zeta_i \zeta_k + \eta_i \eta_k = 0 \quad \begin{Bmatrix} i = 1, 2, 3, \ldots m \\ k = m + 1, m + 2, \ldots n \end{Bmatrix},$$

so sind die aus den Elementen der m ersten Horizontalzeilen gebildeten $m$fachen Determinanten proportional mit ihren reciproken $(n - m)$fachen Determinanten, deren Elemente in den $n - m$ letzten Horizontalzeilen enthalten sind.

Da nun die $m$fachen Determinanten den Projektionen des Kontinuums C, die reciproken $(n - m)$fachen Determinanten den Projektionen des normalen Kontinuums C' entsprechen, so ist der oben behauptete Satz bewiesen.

Für ein System orthogonaler Transformationselemente ist jede partielle Determinante ihrer reciproken (oder ergänzenden) Determinante geradezu gleich. Dies folgt aus der in § 2 erwähnten Eigenschaft dieses Systems, vermöge welcher jedes ursprüngliche Element seinem reciproken Elemente (einer $(n - 1)$fachen Determinante) gleich ist. Da man die Axen $t_1, t_2, \ldots t_m$ des Kontinuums C orthogonal annehmen kann, und ebenso diejenigen des normalen Kontinuums C', so erhellt leicht, wie man auch von dieser Seite her den Satz beweisen kann, dass die Projektionen zweier normalen Kontinua proportional sind.

Nach dieser Abschweifung über die normalen Kontinua kehren wir zur Betrachtung des gegenseitigen Verhaltens zweier linearen Kontinua zurück, deren Dimensionszahlen zusammen derjenigen der Totalität gleich sind. Das eine $m$fache Kontinuum heisse A, das andere $(n - m)$fache B, und es sei $m < \frac{1}{2} n$. Das zu A normale Kontinuum A' wird dann B in einem $(n - m)$fachen Kontinuum C schneiden; das normale zu diesem ist ein $2m$faches Kontinuum C', welches A in sich enthält und B in einem

*m*fachen Kontinuum D schneidet. Wird dann B als $(n - m)$fache Totalität aufgefasst, so sind darin die Kontinua C und D enthalten und zu einander normal. Das ursprüngliche Kontinuum B hat also gleichsam eine orthogonale Zerlegung in die Kontinua C und D erfahren, und da von diesen C zu A orthogonal ist, so darf es bei der Beurteilung der gegenseitigen Lage von A und B ausser acht gelassen werden; es kommt nunmehr alles blossauf die gegenseitige Lage der *m*fachen Kontinua A und D an, welche beide dem 2-*m*fachen Kontinuum C' angehören. Man kann also alle dem $(n - 2m)$fachen Kontinuum C entsprechenden Variabeln gleich Null setzen, das Kontinuum C' als Totalität behandeln, und hat es dann nur mit der Untersuchung der gegenseitigen Lage zweier *m*facher linearer Kontinua innerhalb einer $2m$fachen Totalität zu thun.

Der Fall, wo die Summe der Dimensionszahlen der gegebenen linearen Kontinua die Dimensionszahl der Totalität übertrifft, ist auf den vorigen Fall zurückzuführen. Sind die gegebenen Kontinua ein $(l + m)$faches A und ein $(l + n)$faches B, und die Dimensionszahl der Totalität $l + m + n$, so schneiden sich A und B in einem $l$fachen Kontinuum C. Das normale $(m + n)$fache Kontinuum sei C', so schneidet dieses die Kontinua A und B resp. in einem *m*fachen D und einem *n*fachen E, deren gegenseitige Lage nun ebenso wie oben zu behandeln ist.

Den Weg zur Beurteilung des einzigen Falls, auf den alle übrigen zurückgeführt wurden, bahnen wir uns nun durch die Lösung der folgenden Aufgabe.

Aufgabe. Eine orthogonale Transformation der n Variabeln $x, y, \ldots z$ in die neuen $t_1, t_2, \ldots t_n$ zu finden, durch welche die beliebig gegebenen n homogenen und linearen Polynome

$$p = ax + by + \ldots + cz,\ p' = a'x + b'y + \ldots + c'z, \text{ etc.}$$

in solche Formen

$$p = h_1\, t_1 + h_2\, t_2 + \ldots + h_n\, t_n,\ p' = h'_1\, t_1 + h'_2\, t_2 + \ldots + h'_n\, t_n, \text{ etc.}$$

übergehen, wo alle Summen gleichnamiger Produkte je zweier Koeffizienten denselben Polynom, z. B.

$$h_1\, h_2 + h'_1\, h'_2 + h''_1\, h''_2 + \ldots$$

verschwinden.

Auflösung. Es sei $h_1^2 + h_1'^2 + h_1''^2 + h_1'''^2 + \ldots = s_1$, etc., N die Determinante der nn Elemente h; die reciproken Elemente sollen mit H bezeichnet werden, z. B.

$$\frac{\partial N}{\partial h_1} = H_1 \quad \frac{\partial N}{\partial h'_1} = H'_1, \text{ etc.}$$

Dann ist

$$h_1 = \frac{H_1}{N}\, s_1,\ h'_1 = \frac{H'_1}{N}\, s_1, \text{ etc.}$$

Sind nun $x = \alpha_1\, t_1 + \alpha_2\, t_2 + \ldots + \alpha_n\, t_n$, $y = \beta_1\, t_1 + \ldots, \ldots, z = \gamma_1\, t_1 + \ldots$ die orthogonalen Transformationsformeln, so ist

$$h_1 = a\alpha_1 + b\beta_1 + \ldots + c\gamma_1, \text{ etc.,}$$

also

$$N = \left\| \begin{array}{cccc|cccc} a & .\,b & \ldots & c & \alpha_1 & .\,\beta_1 . & \ldots & \gamma_1 \\ a' & .\,b' & \ldots & c' & \alpha_2 & .\,\beta_2 . & \ldots & \gamma_2 \\ a'' & .\,b'' & \ldots & c'' & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \alpha_n & .\,\beta_n . & \ldots & \gamma_n \end{array} \right\| ,$$

weil die Koeffizienten h entstehen, indem jede Horizontalzeile der linken Hälfte dieses Schemas mit jeder Horizontalzeile der rechten Hälfte zu einer Produktensumme kombiniert wird. Die Determinante der rechten Hälfte ist bekanntlich 1, und die reciproken Elemente sind den ursprünglichen gleich. Die Determinante der linken Hälfte sei $\varDelta$, und die reciproken Elemente seien $A, B, \ldots C$; $A', \ldots$, z. B. $A = \frac{\partial \varDelta}{\partial a}$. Dann ist $N = \varDelta$. Die Grössen H entstehen aus obigem Schema, wenn in jeder Hälfte eine Horizontalzeile weggelassen wird. Also ist

$$H_1 = A\alpha_1 + B\beta_1 + \ldots + C\gamma_1,\ H'_1 = A'\alpha_1 + B'\beta_1 + \ldots + C'\gamma_1, \text{ etc.}$$

Wir bekommen daher n Systeme von je n Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{A}{\varDelta} s - a\right)\alpha + \left(\frac{B}{\varDelta} s - b\right)\beta + \ldots + \left(\frac{C}{\varDelta} s - c\right)\gamma = 0, \\ \left(\frac{A'}{\varDelta} s - a'\right)\alpha + \left(\frac{B'}{\varDelta} s - b'\right)\beta + \ldots + \left(\frac{C'}{\varDelta} s - c'\right)\gamma = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Dieses System hat man sich $n$mal wiederholt zu denken, indem die Buchstaben $s, \alpha, \beta, \ldots \gamma$ nach und nach mit den unteren Zeigern $1, 2, 3, \ldots n$ versehen werden. Eliminiert man die $n - 1$ Verhältnisse $\alpha : \beta : \ldots : \gamma$ und bezeichnet die Determinante der Koeffizienten von $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ mit $S : \varDelta$, so erhält man eine Gleichung $S = 0$, in der nur die Unbekannte s vorkommt. Die irgend einer Horizontalzeile jener Koeffizienten entsprechenden reciproken Elemente der Determinante werden nach geschehener Substitution eines Wertes von s mit $\alpha, \beta, \ldots \gamma$ proportional, sodass zu jedem bestimmten Werte von s immer nur eine Reihe von Verhältnissen $\alpha : \beta : \ldots : \gamma$ gehört. Die Determinante $S : \varDelta$ wird man erhalten, wenn man das Produkt

$$\left(\frac{A}{\varDelta} s - a\right)\left(\frac{B}{\varDelta} s - b\right) \ldots \left(\frac{C}{\varDelta} s - c\right)$$

entwickelt, ohne die alphabetische Folge der Faktoren jedes Monoms zu verändern, und dann jedes solche Monom durch eine Determinante ersetzt, in deren Schema die Faktoren jenes als Elemente der ersten Horizontalzeile erscheinen. Wird ferner jede solche Determinante als Summe von Produkten je einer aus den Elementen $-a, -b, \ldots -c$ gebildeten Determinante $i$ten Grades mit der ungleichnamigen, aus den Elementen $\frac{A}{\varDelta} s$, etc., gebildeten $(n - i)$fachen Determinante dargestellt und beachtet, dass diese immer das $(-1)^{n-i} \frac{s^{n-i}}{\varDelta}$fache von jener ist, so erhält man

$$S = s^n - K_1 s^{n-1} + K_2 s^{n-2} - K_3 s^{n-3} + \ldots + (-1)^n \Delta^2, \quad \ldots \quad (2)$$

wo K_i die Summe der Quadrate aller Determinanten $i$ten Grades bezeichnet, welche aus den Elementen $a, b, \ldots c, a', \ldots$ gebildet werden können, und somit $\binom{n}{i}^2$ Glieder zählt. Es ist klar, dass $K_n = \Delta^2$ wird. Wenn also die Polynome $p, p', p'', \ldots$ alle von einander unabhängig sind, so ist die Gleichung $S = 0$ vom $n$ten Grade und kann die Null nicht zur Wurzel haben.

Betrachten wir nun ein reciprokes Element der Determinante $S : \Delta$, z. B. das, welches dem ursprünglichen Element $\frac{A}{\Delta} s - a$ entspricht, und sehen davon ab, das Δ, B', etc. Funktionen von a sind, so ist dasselbe $-\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{S}{\Delta}\right)$. Denkt man sich aber S als Funktion von s und den nn Grössen $a, b, \ldots c, a', \ldots$, so ist $-\frac{1}{\Delta}\frac{\partial S}{\partial a}$ wegen der überall vorkommenden Quadrate von Determinanten gerade doppelt so gross. Jenes erste reciproke Element hat also den Wert $-\frac{1}{2\Delta}\frac{\partial S}{\partial a}$. Folglich ist

$$\alpha : \beta : \ldots : \gamma = \frac{\partial S}{\partial a} : \frac{\partial S}{\partial b} : \ldots : \frac{\partial S}{\partial c} = \frac{\partial S}{\partial a'} : \frac{\partial S}{\partial b'} : \ldots : \frac{\partial S}{\partial c'} = \text{etc.} \quad \ldots \quad (3)$$

Die gesuchten Verhältnisse werden erst dann unbestimmt, wenn sämtliche nach den nn ursprünglichen Elementen $a, b, \ldots$ abgeleiteten Funktionen von S verschwinden. Da nun

$$n S = s \frac{\partial S}{\partial s} + \tfrac{1}{2} a \frac{\partial S}{\partial a} + \text{etc.}$$

ist, so ist dann zugleich $S = 0, \frac{\partial S}{\partial s} = 0$; folglich hat dann die Gleichung $S = 0$ gleiche Wurzeln.

Wir müssen jetzt umgekehrt zeigen, dass, wenn die Systeme (1) gelten, sie die gemachten Voraussetzungen zur notwendigen Folge haben. Es sei $h = a\alpha + b\beta + \ldots + c\gamma$, $h' = a'\alpha + b'\beta + \ldots + c'\gamma$, etc., wo $h, h', \ldots \alpha, \beta, \ldots \gamma$ nach Belieben mit einem der unteren Zeiger $1, 2, 3, \ldots n$ zu versehen sind. Multipliziert man die Gleichungen (1) mit $a, a', a'', \ldots$ und addiert, so ergiebt sich, wenn man die ähnlichen Gleichungen hinzunimmt, das System

$$\left.\begin{aligned} s\alpha &= ah + a'h' + a''h'' + \ldots, \\ s\beta &= bh + b'h' + b''h'' + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s\gamma &= ch + c'h' + c''h'' + \ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

Bringen wir hier den untern Zeiger 1 an, multiplizieren mit $\alpha_2, \beta_2, \ldots \gamma_2$ und addieren, so ergiebt sich

$$s_1 (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \ldots + \gamma_1 \gamma_2) = h_1 h_2 + h_1' h_2' + h_1'' h_2'' + \ldots$$

Vertauscht man die Zeiger 1 und 2 und subtrahiert beide Gleichungen von einander, so bekommt man

$$(s_1 - s_2)(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \ldots + \gamma_1 \gamma_2) = 0.$$

Wenn die Wurzeln s_1, s_2 verschieden sind, so folgt hieraus

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \ldots + \gamma_1 \gamma_2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

und

$$h_1 h_2 + h'_1 h'_2 + h''_1 h''_2 + \ldots = 0.$$

Wären s_1, s_2 zwei konjugierte imaginäre Wurzeln der Gleichung $S = 0$, so hätten auch je zwei Verhältnisse, wie $\beta_1 : \alpha_1$, $\beta_2 : \alpha_2$ konjugierte Werte, und ihr Produkt wäre die Summe zweier Quadrate; die Gleichung (5) könnte also nicht bestehen. Also kann die Gleichung $S = 0$ keine imaginären Wurzeln haben. Hätte sie gleiche Wurzeln, und gäbe das System (1) für die Verhältnisse $\alpha : \beta : \ldots : \gamma$ bestimmte Werte, so könnte man durch geringe Variation eines oder mehrerer der ursprünglichen Elemente die Gleichheit der Wurzeln in eine geringe Verschiedenheit umändern, und dann würden auch die entsprechenden Verhältnisreihen nur sehr wenig von einander abweichen; die Gleichung (5) würde dann

$$\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \gamma^2 + 2 \, (\alpha d\alpha + \beta d\beta + \ldots + \gamma d\gamma) = 0.$$

Da man die Variationen $d\alpha$, $d\beta$, $\ldots d\gamma$ so klein, als man nur will, muss machen können, so muss auch $\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \gamma^2$ für die wirkliche Gleichheit beider Wurzeln verschwinden, was die imaginäre Beschaffenheit der Verhältnisse, also auch des entsprechenden Werts von s voraussetzt. Wenn also die Gleichung $S = 0$ gleiche reelle Wurzeln hat, so dürfen die Verhältnisse $\alpha : \beta : \ldots : \gamma$ durch das System (1) nicht bestimmt werden, was notwendig erfordert, dass alle nn abgeleiteten Funktionen von S für eine solche Wurzel verschwinden. Es ist dann immer noch möglich, dass $n - 2$ Gleichungen des Systems (1) zwei unter sich unabhängige Reihen von Verhältnissen $\alpha : \beta : \ldots : \gamma$, liefern, und es ist dann leicht, diese so einzurichten, dass sie der Orthogonalitätsbedingung genügen. Der entsprechende rechte Winkel kann dann nach Belieben in seinem zweifachen linearen Kontinuum herumgedreht werden.

Man kann immer $\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \gamma^2 = 1$ machen. Wenn man nun die Gleichungen (4) resp. mit α, β, $\ldots \gamma$ multipliziert und addiert, so erhält man

$$s = h^2 + h'^2 + h''^2 + \ldots.$$

Die Wurzeln der Gleichung $S = 0$ sind also sämtlich positiv, was auch schon aus den n Zeichenwechseln in (2) folgt.

Wir haben nun nachgewiesen, dass die Auflösung des Systems (1) im allgemeinen (Gleichheit von Wurzeln der Glchg. $S = 0$ ausgeschlossen) alles dasjenige in reeller Form leistet, was die Aufgabe verlangt. Wegen der Anwendung auf das Folgende bemerke ich nur noch, dass vermöge der Eigenschaft $h_1 h_2 + h'_1 h'_2 +$ etc. $= 0$, etc., aus den Formen $p = h_1 t_1 + h_2 t_2 + \ldots + h_n t_n$, $p' = h'_1 t'_1 + \ldots$, etc. noch andere sehr vereinfachte sich sogleich ergeben. Man mache

$$\frac{h}{\sqrt{s}} = \eta, \; \frac{h'}{\sqrt{s}} = \eta', \; \frac{h''}{\sqrt{s}} = \eta'', \ldots,$$

wo zu s, h, η nach und nach die untern Zeiger 1, 2, ... n hingehören, dann sind

$$q_1 = \eta_1 p + \eta_1' p' + \eta_1'' p'' + \ldots, \; q_2 = \eta_2 p + \eta_2' p' + \eta_2'' p'' + \ldots, \text{ etc.}$$

orthogonale Transformationsformeln, und man erhält mittelst derselben

$$q_1 = \sqrt{s_1} \cdot t_1, \; q_2 = \sqrt{s_2} \cdot t_2, \ldots, q_n = \sqrt{s_n} \cdot t_n.$$

Satz. In der $2n$fachen Totalität sind zwei $n$fache lineare Kontinua C und C' beliebig gegeben. Von ihrer gemeinschaftlichen Lösung aus werden in denselben resp. die Strahlen r, r' gezogen. Der spitze Winkel $\angle (rr')$ hat offenbar ein absolutes Minimum, welchem das Strahlenpaar a, a' entsprechen möge. Die Bestimmung desselben hängt von einer algebraischen Gleichung $n$ten Grades ab, deren Unbekannte $\cos^2 \angle (aa')$ ist, und ihre Auflösung liefert daher im ganzen n Strahlenpaare a, a'; b, b'; ... c, c', welche den analytischen Bedingungen der Aufgabe genügen. Dann bilden die n Strahlen $a, b, \ldots c$ ein orthogonales Axensystem des Kontinuums C, und ebenso die n andern Strahlen $a', b', \ldots c'$ ein orthogonales Axensystem des Kontinuums C'; und jeder Strahl a des einen Kontinuums ist mit den nichtzugeordneten $n-1$ Strahlen $b', \ldots c'$ des andern Kontinuums orthogonal. Endlich ist der Projektionsfaktor des einen Kontinuums auf das andere, oder

$$\cos \angle (CC') = \cos \angle (aa') \times \cos \angle (bb') \times \ldots \times \cos \angle (cc').$$

Wenn r, r' zwei beliebige Strahlen beider Kontinua C, C' sind, so ist

$$\cos \angle (rr') = \cos \angle (aa') \cdot \cos \angle (ar) \cdot \cos \angle (a'r') + \cos \angle (bb') \cdot \cos \angle (br) \cdot \cos \angle (b'r') + \ldots + \cos \angle (cc') \cdot \cos \angle (cr) \cdot \cos \angle (c'r').$$

Beweis. Es ist leicht, in jedem der gegebenen Kontinua C, C' ein orthogonales Axensystem zu finden. In C sei es durch die n Variabeln $x, y, \ldots z$, in C' durch $t_1, t_2, \ldots t_n$ dargestellt. Zu jenem System nehmen wir noch n Axen $u, v, \ldots w$ hinzu, sodass $x, y, \ldots z, u, v, \ldots w$ die orthogonalen Variabeln der Totalität sind. Dann sind $u = o$, $v = o, \ldots w = o$ die Gleichungen des Kontinuums C; diejenigen von C' seien

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 + \ldots + \alpha_n t_n, \\
y &= \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \ldots + \beta_n t_n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
z &= \gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2 + \ldots + \gamma_n t_n \\
u &= \delta_1 t_1 + \delta_2 t_2 + \ldots + \delta_n t_n \\
v &= \varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_2 t_2 + \ldots + \varepsilon_n t_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
w &= \zeta_1 t_1 + \zeta_2 t_2 + \ldots + \zeta_n t_n
\end{aligned}$$

Es wird sein

$$\alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + \ldots + \zeta^2 = 1$$

mit unterm Zeiger 1, 2, 3, ... n; ferner bestehen $\frac{1}{2} n (n-1)$ Gleichungen, wie

$$\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \ldots + \gamma_1 \gamma_2 + \delta_1 \delta_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \ldots + \zeta_1 \zeta_2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Alle diese Relationen bestehen fort, wenn man auch das Axensystem $(t_1, t_2, \ldots t_n)$ oder das System $(x, y, \ldots z)$ oder das System $(u, v, \ldots w)$ orthogonal transformiert. Wir haben nun schon gesehen, dass man durch die zwei ersten Transformationen bewirken kann, dass die n ersten Gleichungen des linearen Kontinuums C' sich so vereinfachen:

$$x = \alpha t_1,\ y = \beta t_2, \ldots z = \gamma t_n.$$

Dann reduzieren sich aber die $\frac{1}{2} n (n-1)$ Orthogonalitätsbedingungen (6) auf:

$$\delta_1 \delta_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \ldots + \zeta_1 \zeta_2 = 0, \text{ etc.}$$

Wird jetzt $\alpha'^2 = 1 - \alpha^2, \beta'^2 = 1 - \beta^2, \ldots \gamma'^2 = 1 - \gamma^2$ gesetzt, so hat man auch

$$\delta_1^2 + \varepsilon_1^2 + \ldots + \zeta_1^2 = \alpha'^2,\ \delta_2^2 + \varepsilon_2^2 + \zeta_2^2 = \beta'^2, \ldots, \delta_n^2 + \varepsilon_n^2 + \ldots + \zeta_n^2 = \gamma'^2,$$

$$\frac{\delta_1 u + \varepsilon_1 v + \ldots + \zeta_1 w}{\alpha'} = \alpha' t_1,\ \frac{\delta_2 u + \varepsilon_2 v + \ldots + \zeta_2 w}{\beta'} = \beta' t_2, \ldots, \frac{\delta_n u + \varepsilon_n v + \ldots + \zeta_n w}{\gamma'} = \gamma' t_n.$$

Diese auf $u, v, \ldots w$ bezügliche Transformation ist orthogonal. Bezeichnet man die daraus entstehenden neuen Variabeln wieder mit $u, v, \ldots w$, so hat man zuletzt folgende Systeme von Gleichungen:

für das Kontinuum C

$$u = o,\ v = o, \ldots, w = o;$$

für das Kontinuum C'

$$x = \alpha t_1,\ y = \beta t_2, \ldots z = \gamma t_n,\ u = \alpha' t_1,\ v = \beta' t_2, \ldots w = \gamma' t_n.$$

Man sieht, dass der Kosinus des Winkels der Axen x und t_1 gleich α ist, und dass die übrigen Axen $t_2, t_3, \ldots t_n$ zur Axe x orthogonal sind, u. s. f.

Denkt man sich ein $n$faches Paralleloschem, dessen Kanten sämtlich gleich 1 sind und auf den Axen $t_1, t_2, \ldots t_n$ liegen, so ist sein Mass 1, und die Projektionen seiner Kanten auf die Axen $x, y, \ldots z$ des Kontinuums C sind:

$$\begin{array}{l} \alpha, o, o, \ldots o, \\ o, \beta, o, \ldots o, \\ \ldots\ldots\ldots \\ o, o, o, \ldots . \gamma. \end{array}$$

folglich ist der Projektionsfaktor von C' auf C, oder $\cos \angle (CC') = \alpha\beta \ldots \gamma$.

Es sei r irgend ein in C befindlicher Strahl, $x, y, \ldots z$ seine Projektionen, ebenso r' irgend ein Strahl in C' und $t_1, t_2, \ldots t_n$ seine Projektionen, $\Theta = \angle (rr')$, so ist

$$rr' \cos \Theta = \alpha x t_1 + \beta y t_2 + \ldots + \gamma z t_n,$$

woraus vermöge einer bekannten identischen Gleichung

$$(\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \ldots + \gamma^2 z^2)\, r'^2 - (rr' \cos \Theta)^2 = (\alpha x t_2 - \beta y t_1)^2 + \text{etc.}$$

folgt. Wenn also der Strahl r fest bleibt, und nur r' variiert, so ist $\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \ldots + \gamma^2 z^2$ der grösste Wert von $r^2 \cos^2 \Theta$, und dieser findet statt für

$$\alpha x : \beta y : \ldots : \gamma z = t_1 : t_2 : \ldots : t_n.$$

Ist ferner α^2 das grösste unter den Quadraten $\alpha^2, \beta^2, \dots \gamma^2$, so ist α^2 das absolute Maximum von

$$\cos^2 \Theta = \frac{\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \dots + \gamma^2 z^2}{x^2 + \quad y^2 + \dots + \quad z^2},$$

und dieses Maximum findet statt für $y = o, \dots z = o$; dann ist aber auch $t_2 = o$, $t_3 = o$, $\dots t_n = o$. Folglich ist der spitze Winkel $\angle (xt_1)$ das absolute Minimum von Θ, und für dieses $\alpha = \cos \Theta$, wenn α positiv genommen wird. Da aber α^2 eine Wurzel derselben Gleichung $n$ten Grades ist, welche auch $\beta^2, \dots \gamma^2$ zu Wurzeln hat, so haben die Winkel $\angle (yt_2), \dots \angle (zt_n)$ und die Axenpaare, von denen sie gebildet werden, dieselbe analytische Bedeutung, wie der $\angle (xt_1)$ und die ihn einschliessenden Axen.

Bemerkung 1. Ergänzt man das System t_1, t_2, t_n zu einem totalen orthogonalen System, so kann man unter anderm dem Schema der Transformationselemente folgende Gestalt geben:

$$\begin{array}{llllll}
\alpha, o, \dots o, & -\alpha', & o, \dots & o \\
o, \beta, \dots o, & o, & -\beta', \dots & o \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
o, o, \dots \gamma, & o, & o, \dots & -\gamma' \\
\alpha', o, \dots o, & \alpha, & o, \dots & o \\
o, \beta', \dots o, & o, & \beta, \dots & o \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
o, o, \dots \gamma', & o, & o, \dots & \gamma
\end{array}$$

Die Determinante muss den Wert 1 haben. Es ist leicht, dieses zu verifizieren, Die Determinante wird erhalten, wenn man die Vertikalzeilen auf alle möglichen Arten permutiert und das Produkt der in die Diagonale fallenden Elemente positiv oder negativ nimmt, je nachdem die Permutation eine positive oder negative ist. Sobald man aber nicht zwei gleichnamige Vertikalzeilen der linken und rechten Hälfte vertauscht, fällt eine Null auf die Diagonale. Hieraus ist klar, dass die Determinante

$$(\alpha^2 + \alpha'^2)(\beta^2 + \beta'^2) \dots (\gamma^2 + \gamma'^2)$$

sein muss.

Bemerkung 2. Wenn ein Strahl und ein lineares Kontinuum gegeben sind, so ist der in diesem befindliche Strahl, welcher mit jenem den kleinsten spitzen Winkel bildet, seine Projektion auf dieses lineare Kontinuum. Dieser Satz ist sehr leicht zu beweisen.

Sind nun in der $2n$fachen Totalität zwei lineare $n$fache Kontinua beliebig gegeben, so sind ihre n Axenpaare durch die Bedingung bestimmt, dass von je zwei Axen eines Paares jede die Projektion der andern ist.

§ 16. *Ueber die Zahl der Teile, in welche die nfache Totalität durch eine beliebige Menge (n — 1)facher linearer Kontinua geteilt wird.*

Satz. Sind i lineare Gleichungen mit n Variabeln gegeben, von denen nie $n+1$ zugleich bestehen, so ist die Zahl der durch sie gebildeten Teile der Totalität

$$\binom{i}{o} + \binom{i}{1} + \binom{i}{2} + \binom{i}{3} + \dots + \binom{i}{n} = f(n, i).$$

Beweis. In der letzten der i linearen Gleichungen nehmen wir die Konstante gross genug an, dass ihr Polynom immer das gleiche Vorzeichen mit dieser Konstanten behält, welche gemeinschaftliche Lösung von je n der $i-1$ übrigen Gleichungen man darin auch substituieren mag. Die Zahl der Teile der Totalität, für welche jenes Polynom das entgegengesetzte Zeichen seiner Konstante behält, ist dann gleich der Zahl der Teile des $(n-1)$fachen linearen Kontinuums, für welches das Polynom verschwindet, oder gleich der Zahl der Teile, in welche eine $(n-1)$fache Totalität von $i-1$ linearen Kontinuen geteilt wird, also gleich $f(n-1, i-1)$. Da aber die erwähnten Teile der $n$fachen Totalität durch die letzte lineare Gleichung zu den schon von den übrigen $i-1$ Gleichungen gebildeten Teilen neu hinzugebracht werden, so ist

$$f(n, i) = f(n, i-1) + f(n-1, i-1).$$

Variiert man nun jene zuerst sehr gross angenommene Konstante, sodass die Gleichung irgend eine schon vorhandene gemeinschaftliche Lösung von n der übrigen festen Gleichungen passiert, so ist leicht zu zeigen, dass die Zahl $f(n, i)$ nachher gleich gross ist, wie vorher. Statt eines geschlossenen Teiles nämlich, worin jenes bewegte Polynom gleiches Vorzeichen mit seiner Konstanten und die n zur Lösung gehörenden Polynome jedes sein bestimmtes Vorzeichen hatten, tritt nun wiederum ein geschlossener Teil auf, innerhalb dessen alle $n+1$ Polynome entgegengesetzte Vorzeichen haben, wie vorher; innerhalb aller übrigen Teile dagegen behält jedes der i Polynome dasselbe Vorzeichen wie vorher. Um das Gesagte noch näher zu begründen, bezeichne ich diejenigen n von den i gegebenen Polynomen, welche für die betrachtete Lösung verschwinden, mit p_1, $p_2, \dots p_n$, das Polynom, dessen Konstante berührt wird, mit p_{n+1}, eliminiere dann aus den $n+1$ Gleichungen, welche diese p als lineare Funktionen der n Variabeln $x, y, \dots$ angeben, diese letzteren, und erhalte so die Gleichung

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n + a_{n+1} p_{n+1} = C,$$

wo nur C von jener variierten Konstanten abhängt. Ist nun zuerst C positiv gewesen, so geben die Bedingungen, dass alle Glieder der linken Seite positiv sein sollten, einen geschlossenen Teil der Totalität; und wenn jetzt C die Null passiert hat und negativ geworden ist, so muss man verlangen, dass $a_1 p_1, a_2 p_2, \dots a_{n+1} p_{n+1}$ sämtlich negativ seien. um eine geschlossene Totalität zu bekommen. Innerhalb beider geschlossener Totalitäten hat also der Wert eines jeden der Polynome $p_1, p_2, \dots p_{n+1}$ entgegengesetztes Vor-

zeichen. Die gemachte Bemerkung gilt, so oft das bewegte Polynom eine Lösung passiert. Die Zahl $f\ (n, i)$ ist daher von der gegenseitigen Lage aller i linearen Kontinua unabhängig, wofern nur nie mehr als n derselben in einer Lösung zusammentreffen.

Ist kein lineares Kontinuum gegeben, so zählt die ungeteilte Totalität für 1; folglich ist $f\ (n, o) = 1$. Addiert man nun die Gleichungen

$$\begin{aligned} f(n, i) &= f(n, i-1) + f(n-1, i-1), \\ f(n, i-1) &= f(n, i-2) + f(n-1, i-2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f(n, 1) &= f(n, o) + f(n-1, o), \\ f(n, o) &= 1, \end{aligned}$$

so erhält man

$$f(n, i) = 1 + f(n-1, o) + f(n-1, 1) + f(n-1, 2) + \ldots + f(n-1, i-1).$$

Es sei $f(n, i) - f(n-1, i) = \varphi(n, i)$, so ist $\varphi(n, o) = o$, und

$$\varphi(n, i) = \varphi(n-1, 1) + \varphi(n-1, 2) + \varphi(n-1, 3) + \ldots + \varphi(n-1, i-1).$$

Nun ist $f(1, i) = i + 1$, also $f(o, i-1) = f(1, i) - f(1, i-1) = 1$, daher auch $f(o, i) = 1$ und deshalb $\varphi(1, i) = i$; folglich ist

$$\varphi(2, i) = 1 + 2 + 3 + \ldots + (i-1) = \binom{i}{2}$$

$$\varphi(3, i) = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \ldots + \binom{i-1}{2} = \binom{i}{3}$$

und überhaupt $\varphi(n, i) = \binom{i}{n}$. Da somit

$$f(n, i) = f(n-1, i) + \binom{i}{n}$$

ist, so folgt nun leicht:

$$f(n, i) = \binom{i}{o} + \binom{i}{1} + \binom{i}{2} + \binom{i}{3} + \ldots + \binom{i}{n}.$$

Man sieht leicht, dass, wenn $i \overline{\overline{<}}\, n$ ist, $f(n, i) = 2^i$ wird.

Der soeben bewiesene Satz kann auch so ausgesprochen werden: Wenn i lineare Polynome mit n Variabeln beliebig gegeben sind, sodass nie mehr als n zugleich verschwinden, aber auch immer n durch eine und dieselbe endliche Lösung zum Verschwinden gebracht werden, so ist die Zahl der verschiedenen Gruppen von Vorzeichen, welche die Werte dieser Polynome für alle reellen Lösungen annehmen, gleich $\binom{i}{o} + \binom{i}{2} + \ldots + \binom{i}{n}$.

Satz. Unter derselben Voraussetzung ist die Zahl der Vorzeichengruppen, welche nur für endliche Werte der Variabeln stattfinden können, gleich $\binom{i-1}{n}$. Man kann dies die Zahl der geschlossenen Teile der Totalität nennen.

Beweis. Wenn irgend $n+1$ Polynome gewählt werden, so kann man dieselben mit solchen konstanten und endlichen Faktoren multiplizieren, dass aus der Summe der Produkte die n Variabeln verschwinden. Wir haben dann eine homogene lineare Funktion der $n+1$ Polynome gefunden, welche einer Konstanten gleich ist. Denken wir uns z. B. jene Faktoren und diese Konstante sämtlich positiv und setzen für die $n+1$ Polynome eine Gruppe positiver Vorzeichen, so ist klar, dass unter dieser Bedingung kein Polynom einen unendlich grossen Wert haben kann. Da aber jede Variable als lineare Funktion von n dieser Polynome dargestellt werden kann, so kann auch keine Variable unendlich gross werden. Nun sei ein Polynom p so beschaffen, dass sein Wert für alle Lösungen, welche irgend n der übrigen Polynome verschwinden machen, dasselbe Vorzeichen, z. B. $+$, habe, und es sei eine Gruppe von Vorzeichen bekannt, welche für $p=o$ nur endliche Lösungen gestattet, z. B. die Gruppe von $i-1$ Pluszeichen; man nehme dann beliebige n Polynome $p_1, p_2, \dots p_n$ heraus und suche die identische Relation

$$ap + a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n = A,$$

wo A positiv sein möge, so müssen, damit für $p=o$ nur endliche positive Werte von $p_1, p_2, \dots p_n$ stattfinden können, sämtliche Faktoren $a_1, a_2, \dots a_n$ positiv sein. Da aber für die Lösung $p_1=o, p_2=o, \dots p_n=o$ auch p positiv sein soll, so muss auch a positiv sein. Dann gestattet aber die Gruppe der positiven Vorzeichen für $p, p_1, \dots p_n$ nur endliche Lösungen. Sobald man aber dem Polynom p jeden beliebigen negativen Wert giebt, so kann auch z. B. p_1 jeden beliebigen positiven Wert bekommen. Hieraus ergiebt sich, dass zu der für die $i-1$ Polynome stattfindenden Zahl der fraglichen Vorzeichengruppen durch das neue Polynom p noch die Zahl der für $p=o$ stattfindenden Vorzeichengruppen, welche nur endliche Lösungen erlauben, hinzugebracht wird. Wenn wir also die fragliche Zahl mit $f\,(n, i)$ bezeichnen, so ist

$$f(n,i) = f(n, i-1) + f(n-1, i-1).$$

Dass der Durchgang von p durch eine Lösung nichts ändert, haben wir schon gesehen. Daher dürfen wir jetzt die Bedingung fallen lassen, dass unter den gegebenen Polynomen eines p sich finde, dessen Wert immer dasselbe Vorzeichen behalte, so oft auch je n der übrigen Polynome zugleich verschwinden mögen; die Formel gilt allgemein. Nun ist $f(n,i)=o$ für $i \overline{\gtrless} n$, aber $f(n, n+1)=1$; also $f(n,i)=f(n-1,n)+f(n-1,n+1)+f(n-1, n+2)+\dots+f(n-1,i-1)$. Es ist $f(1,i)=i-1$ für $i \overline{\gtrless} 1$, daher $f(2,i)=\binom{i-1}{2}$, $f(3,i)=\binom{i-1}{3}$, überhaupt $f(n,i)=\binom{i-1}{n}$.

Satz. Wenn i homogene lineare Polynome mit n Variabeln beliebig gegeben sind, so ist die Zahl der Vorzeichengruppen

$$2\left\{\binom{i-1}{o}+\binom{i-1}{1}+\binom{i-1}{2}+\dots+\binom{i-1}{n-1}\right\}$$

oder doppelt so gross wie für $i-1$ nicht homogene lineare Polynome mit nur $n-1$ Variabeln.

Beweis. Man transformiere die n Variabeln so, dass eines der Polynome sich auf eine einzige Variable, z. B. x, reduziert, dividiere dann alle übrigen Polynome durch diese Variable x, so hat man es nur noch mit $n-1$ Variabeln und $i-1$ nicht homogenen Polynomen zu thun. Man stelle sämtliche Gruppen der $i-1$ Vorzeichen auf. Multipliziert man jetzt die Polynome mit einem positiven Werte von x, so werden die Gruppen nicht geändert, und zu jeder kommt noch das positive Vorzeichen des Polynoms x hinzu. Multipliziert man dann auch mit einem negativen Wert von x, so werden in jeder Gruppe alle Vorzeichen geändert, und für das Polynom x kommt das Minuszeichen hinzu. Die Zahl der Vorzeichengruppen wird also wirklich doppelt so gross als vorher.

Wenn i nichthomogene Polynome mit n Variabeln gegeben sind, so ist die Zahl aller Vorzeichengruppen zusammengesetzt aus der Zahl derer, welche nur endliche Lösungen, und die Zahl derer, welche auch unendliche Lösungen gestatten. Die letzte Zahl ist aber dieselbe, wie wenn man die Konstante eines jeden Polynoms weglässt, sodass alle Polynome in Beziehung auf die n Variabeln homogen werden. Wenn also $f(n, i)$ die Zahl aller Vorzeichengruppen überhaupt bezeichnet, so ist

$$f(n, i) = 2f(n-1, i-1) + \binom{i-1}{n-1}.$$

Verbinden wir dieses mit

$$f(n, i) = f(n, i-1) + f(n-1, i-1),$$

so folgt

$$f(n, i-1) - f(n-1, i-1) = \binom{i-1}{n}$$

oder

$$f(n, i) - f(n-1, i) = \binom{i}{n},$$

woraus wiederum

$$f(n, i) = \binom{i}{0} + \binom{i}{1} + \binom{i}{2} + \ldots + \binom{i}{n}$$

sich ergiebt.

§ 17. *Reguläre Polyscheme der vierfachen Totalität.*

Wenn in der dreifachen Totalität, oder im Raume, ein reguläres Polyeder von regulären m Ecken umschlossen wird, deren je n in einer Ecke zusammenstossen, so wollen wir dasselbe mit dem Charakter (m, n) bezeichnen. Die Geometrie kennt zwei Verfahren, alle Kombinationen (m, n), welche vorhandenen Polyedern entsprechen, aufzuzählen und die Zahl der Stücke eines jeden zu bestimmen. Das erste Verfahren ist rein konstruktiv, ohne Rücksicht auf Massverhältnisse. Man stellt sich nur die Aufgabe, aus lauter m Ecken, deren je n einen Körperwinkel bilden, ein geschlossenes Polyeder zusammenzufügen. Der Satz in § 10 reicht für diesen Zweck hin; für $n = 3$ wird er

$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 1$, oder, da $a_3 = 1$ ist, $a_0 - a_1 + a_2 = 2$. Man findet leicht $na_0 = 2a_1 = ma_3$ und hieraus

$$a_0 : a_1 : a_2 : 1 = 4\,m : 2\,mn : 4\,n : (4 - (m-2)(n-2)).$$

Die Natur der Aufgabe verlangt für $4 - (m-2)(n-2)$ einen positiven Wert. Da nun der kleinste Wert für m sowohl als für n die Zahl 3 ist, so sind für das Produkt $(m-2)(n-2)$ nur die Werte 1, 2, 3 möglich, woraus als einzig mögliche Charaktere (3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3) sich ergeben. (Gestattet man für a_0, a_1, a_2 auch unendlich grosse Werte, so kann noch $(m-2)(n-2) = 4$ sein, woraus die Charaktere (3,6), (4,4), (6,3) entstehen, welche nur die Arten anzeigen, auf welche die Ebene mit gleichen regulären Vielecken bedeckt werden kann.) Durch dieses Verfahren ist das Vorhandensein der den fünf obigen Charakteren entsprechenden Polyeder noch nicht bewiesen, sondern nur gezeigt, dass keine anderen Charaktere möglich sind. Es kommt nur noch darauf an, einen dem Charakter entsprechenden Körperwinkel zu konstruieren. Gelingt dies, so weiss man dann zum voraus, dass beim wiederholten Aneinanderfügen der offenen polyedrischen Figur des Körperwinkels ein geschlossenes Polyeder von der bestimmten Anzahl von Stücken entstehen wird. Vermöge der Natur dieses ersten konstruktiven Verfahrens ist es gleichgiltig, ob der Körperwinkel einfach oder überschlagen sei; ebenso in Beziehung auf das Vieleck; die Zahl der Stücke des Polyeders wird dieselbe bleiben. Wenn wir z. B. das Symbol $\frac{5}{2}$ für ein überschlagenes reguläres Fünfteck gebrauchen, dessen Perimeter zweimal herumgeht, so haben das einfache Polyeder (5, 3) und das überschlagene $(\frac{5}{2}, 3)$ die gleiche Zahl von Stücken.

Das andere Verfahren gründet sich auf die Betrachtung von Massverhältnissen. Man weiss z. B., dass die Konstruktion eines dem Charakter (m, n) entsprechenden regulären Ecks die Bedingung $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ erfordert, und dass ein solches Eck auch für gebrochene Werte von m, n möglich ist, wenn sie nur dieser Bedingung genügen. Die Projektion der Oberfläche des Polyeders auf eine um sein Centrum beschriebene Kugel liefert ein Netz von regulären sphärischen Vielecken, und, da der Inhalt eines solchen durch seine Winkel ausgedrückt werden kann, so ist das rationale Verhältnis, in welchem er zur ganzen Kugelfläche steht, bekannt. Dabei ist aber immer noch möglich, dass das Netz nie sich schliesst. Setzen wir z. B. $m = \frac{2}{7}$, $n = 3$, so ist die Bedingung $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$ erfüllt; der Inhalt des $\left(\frac{7}{2}\right)$Ecks ist $\frac{5}{3}\pi$ oder $\frac{5}{12}$ der Kugelfläche. Obschon man daher einen Augenblick glauben könnte, das Netz bestände aus 12 überschlagenen Siebenecken und enthielte die Kugelfläche 5 Mal, so kehrt doch das Netz nicht in sich selbst zurück, weil (7, 3) nicht Charakter eines Polyeders sein kann.

Schliesst man aber überschlagene Körperwinkel und Vielecke von der Betrachtung aus, so giebt auch dieses zweite Verfahren nur die wirklichen regulären Polyeder, und

der Satz über den Inhalt eines sphärischen Vielecks lehrt uns die Zahl der Stücke eines jeden kennen.

Gehen wir jetzt vom Raume zur vierfachen Totalität über, so ist sogleich klar, dass der Umschluss eines regulären Polyschems aus lauter gleichen regulären Polyedern bestehen muss, denen wir den Charakter (m, n) geben wollen. Da aber um jede Grenzlösung herum die betreffenden Stücke des Umschlusses auf reguläre Art zusammengefügt sein müssen, so ist nicht weniger klar, dass die Enden aller von der Grenzlösung ausgehenden Grenzstrahlen oder Kanten in einem und demselben dreifachen linearen Kontinuum liegen, und wenn man dieses als Raum betrachtet, darin als Ecken eines regulären Polyeders gruppiert sein müssen; da die Seitenflächen des letzten reguläre n Ecke sind, so setzen wir (n, p) als Charakter dieses Polyeders. Hierdurch ist die Bedeutung des Charakters (m, n, p), den wir für ein reguläres Polyschem gebrauchen wollen, hinreichend erklärt. Bei der Aufsuchung der möglichen Charaklere dieser Art können wir wiederum, wie vorhin für den Raum gezeigt worden, entweder ein konstruktives oder ein rechnendes Verfahren anzuwenden versuchen. Das erste würde, wenn m, n, p rationale Brüche sind, nur ihre Zähler, das zweite hingegen ihre Werte berücksichtigen. Was die allgemeine Bestimmung der Zahl der Stücke eines vierfachen Polyschems vom Charakter (m, n, p) betrifft, so lassen uns leider beide Verfahren gleich sehr im Stich; das erste, weil die Formel $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 1$ sich auf $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$ reduziert und deshalb nur die Verhältnisse der gesuchten Zahlen, nicht ihre Werte selbst uns kennen lehrt; das zweite, weil es auf einfache Integrale von transcendenter Natur führt, deren Auswertung nur für jeden einzelnen Charakter besonders und zwar mit Hilfe des ersten konstruktiven Verfahrens gelingt. Es bleibt also kein anderes Mittel übrig, die Existenz irgend eines Polyschems (m, n, p) zu beurteilen und die Zahl seiner Stücke zu erfahren, als die wirkliche Konstruktion; durch den Mangel einer apriorischen Formel für reguläre Polyscheme unterscheidet sich demnach die vierfache Totalität wesentlich vom Raume.

Wir versuchen zuerst auf dem allgemeinen Standpunkt das Mögliche zu thun. Der Umschluss des regulären Polyschems (m, n, p) enthalte a_0 Ecken, a_1 Kanten, a_2 Vielecke, a_3 Polyeder, so ist $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$. Das schon erwähnte Polyeder (n, p) nennen wir Basis derjenigen Grenzlösung des Polyschems, welche Kanten aussendet nach allen Ecken jenes ersten. Diese Basis hat $4n : (2n + 2p - np)$ Ecken, $2np : (2n + 2p - np)$ Kanten und $4p : (2n + 2p - np)$ Vielecke. Von der entsprechenden Grenzlösung des Polyschems gehen also resp. so viele Kanten, m-Ecke und Polyeder (m, n) aus. Multipliziert man mit a_0, so erhält man die Gesamtzahlen. Da aber jede Kante zwei Grenzlösungen verbindet, jedes m-Eck deren m und jedes Polyeder (m, n) deren $4m : (2m + 2n - mn)$ in sich vereinigt, so hat man

$$\frac{4n}{2(n+p)-np}\, a_0 = 2a_1,\quad \frac{2np}{2(n+p)-np}\, a_0 = ma_2,\quad \frac{4p}{2(n+p)-np}\, a_0 = \frac{4m}{2(m+n)-mn}\, a_3,$$

oder

$$a_0 : a_1 : a_2 : a_3 = m(2(n+p) - np) : 2mn : 2np : p(2(m+n) - mn). \quad . \quad . \quad (1)$$

Es versteht sich von selbst, dass beide Charaktere (m,n) und (n,p) nur existierenden Polyedern entsprechen dürfen. Ist 1 die Seite eines regulären Polyeders (n,p), so ist $\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{p} : \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{n}}$ der Radius der umschriebenen Kugel. Wird aber 1 als Kante AB des Polyschems (m,n,p) angenommen, so ist $2 \cos \frac{\pi}{m}$ die Seite der Basis der Grenzlösung A, und wenn M das Centrum dieser Basis bezeichnet, so ist also der Radius MB der umschriebenen Kugel $= \cos \frac{\pi}{m} \sin \frac{\pi}{p} : \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{n}}$. Da AMB ein in M rechtwinkliges Dreieck ist, so ist $AM = \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{m} \sin^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{n}} : \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{n}}$, und

$$\sin \frac{\pi}{m} \sin \frac{\pi}{p} > \cos \frac{\pi}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

eine Bedingung, ohne welche das Polyschem nicht existieren kann. Auf der Verlängerung des Strahls AM liegt eine Lösung O, welche von A und B gleichweit absteht; sie wird dann auch von allen andern Ecken der Basis gleichweit abstehen, ist also überhaupt von allen Grenzlösungen des Polyschems gleich weit entfernt; wir nennen sie daher das Centrum des Polyschems und OA seinen Radius. Ist nun C die Mitte der Kante AB, so ist das Dreieck OAC dem ABM ähnlich; daher der Radius gleich:

$$\frac{\sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{n}}}{2\sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{m} \sin^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{n}}}$$

Ist N das Centrum eines der in A zusammenstossenden Grenzpolyeder, so ist $NA = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{n} : \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{n} - \cos^2 \frac{\pi}{m}}$; folglich bleibt das Verhältnis

$$\frac{NA}{OA} = \frac{\sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{m} \sin^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{n}}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{m} - \cos^2 \frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{p} - \cos^2 \frac{\pi}{n}}}$$

sich gleich, wenn man auch m und p miteinander vertauscht; daher ändert sich auch das Verhältnis $ON : OA$ nicht. Im Raume entspricht der Satz, dass, wenn (m, n) und (n, m) derselben Kugel eingeschrieben sind, sie auch wieder derselben Kugel umschrieben sind.

Halten wir uns an ganze Werte von m, n, p, so genügen der Bedingung (2) nur folgende Charaktere:

$$(3, 3, 3),\ (3, 3, 4),\ (3, 3, 5),\ (3, 4, 3),\ (4, 3, 3),\ (5, 3, 3).$$

Der Charakter $(4, 3, 4)$, welcher $\sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{3}$ giebt, lässt A mit M zusammenfallen und zeigt also nur die Erfüllung des Raums durch aneinander gelegte Würfel an.

Die Centra N aller in A zusammengefügter Polyeder (m, n) liegen in einem dreifachen linearen Kontinuum und entsprechen den Vielecken jener Basis (n, p), indem die Strahlen AN durch die Mittelpunkte dieser Vielecke gehen; diese N bilden also ein Polyeder (p, n). Es ist nun leicht einzusehen, dass die Centra aller das Polyschem (m, n, p) umschliessenden Polyeder die Grenzlösungen eines neuen Polyschems (p, n, m) sind. Wenn also ein Polyschem von einem gewissen Charakter existiert, so existiert auch das Polyschem, in dessen Charakter die Elemente die umgekehrte Ordnung befolgen. Wir nennen solche Polyscheme reciproke. Wenn zwei reciproke Polyscheme gleichen Radius OA haben, so ist auch in beiden der Abstand ON des Centrums eines Grenzpolyeders vom eigentlichen Centrum gleich. Unter den 6 oben nicht als unmöglich aufgeführten Charakteren sind zwei, (3, 3, 3) und (3, 4, 3) mit sich selbst reciprok; die übrigen bestehen aus zwei Paaren reciproker Charaktere: (3, 3, 4), (4, 3, 3) und (3, 3, 5), (5, 3, 3). Im Raume ist bekanntlich nur das Tetraeder mit sich selbst reciprok; reciproke Paare sind: Oktaeder, Hexaeder und Ikosaeder, Dodekaeder.

Wir wollen nun durch wirkliche Konstruktion die Existenz aller 6 den obigen Charakteren entsprechenden Polyscheme beweisen.

1. Dem Charakter (3, 3, 3) entspricht das Polyschem mit der kleinsten Zahl von Grenzkontinuen. Es hat also 5 Ecken, 10 Kanten, 10 Dreiecke und 5 Tetraeder. Wir nennen es Pentaschem.

2. Um das Polyschem (3, 3, 4) zu konstruieren, tragen wir auf den positiven und negativen Hälften der vier vom Ursprung O ausgehenden Axen acht gleiche Abstände auf, so werden je vier auf lauter verschiedenen Axen befindliche Endlösungen ein Tetraeder bilden, und da eine Gruppe von vier Vorzeichen auf 16 Arten variiert werden kann, so giebt es 16 solche Tetraeder. Ist A das eine Ende einer Axe, so bilden die 6 Enden der 3 übrigen Axen ein Oktaeder (3, 4), als Basis von A. Das konstruierte Polyschem entspricht also dem Charakter (3, 3, 4); es hat 8 Ecken, 24 Kanten, 32 Dreiecke und 16 Tetraeder, und möge daher Hekkaidekaschem heissen.

3. Da jede Grenzlösung des Polyschems (3, 3, 5) eine ikosaedrische Basis hat, so erheischt die folgende Erörterung eine vorläufige Bezeichnung aller Stücke des Ikosaeders mit Ziffern. Ich denke mir zwei entgegengesetzte Ecken desselben durch eine Axe verbunden und zähle dann die Stücke zonenweise ab. Es giebt dann zwei Zonen, welche je 5 Ecken enthalten; je die dem einen Axenende benachbarte nenne ich seinen Fünfeckschnitt.

Schema der Ecken.	Schema d. Dreiecke.	Schema der Kanten.
1	1 2 3 4 5	1 2 3 4 5
2 3 4 5 6	6 7 8 9 10	6 7 8 9 10
7 8 9 10 11	11 12 13 14 15	11 . 16 . 12 . 17 . 13 . 18 . 14 . 19 . 15 . 20
12	16 17 18 19 20	25 21 22 23 24
		26 27 28 29 30.

Im Schema der Ecken sind 2, 3, 4, 5, 6 die Ecken des Fünfeckschnitts von 1; die Ecken 2, 3, 7 bilden ein Dreieck, u. s. f. Im Schema der Flächen bedeutet 1 das Δ (1 . 2 . 3), die erste Horizontalzeile enthält die um das Eck 1 herumliegenden Dreiecke, die zweite die fünf Dreiecke, welche mit den vorigen Kanten gemein haben; und wie die übrigen Dreiecke angeordnet sind, wird deutlich genug werden, wenn ich sage, dass z. B. die Dreiecke 1, 2, 7, 11, 6 im Eck 3, die Dreiecke 7, 11, 16, 17, 12 im Eck 8 zusammenstossen. Im Schema der Kanten enthält die erste Horizontalzeile die vom Eck 1 nach den Ecken 2, 3, 4, 5, 6 gehenden Kanten, die zweite die Seiten (2 . 3), (3 . 4), etc. des Fünfeckschnitts, die dritte die Kanten (2 . 7), (7 . 3), (3 . 8), (8 . 4), etc., die vierte die Kanten (11 . 7), (7 . 8), (8 . 9), etc., endlich die fünfte die vom Eck 12 ausgehenden Kanten (12 . 7), (12 . 8), etc.

Es sei nun a ein Eck des Polyschems; die 12 Ecken seiner ikosaedrischen Basis seien mit b bezeichnet; ich stelle dann dieses Eck dar durch

$$a \begin{pmatrix} & & b_1 & & \\ b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 & b_{10} & b_{11} \\ & & b_{12} & & \end{pmatrix} \text{ oder z. B. auch: } a \begin{pmatrix} & & b_2 & & \\ b_1 & b_3 & b_7 & b_{11} & b_6 \\ b_4 & b_8 & b_{12} & b_{10} & b_5 \\ & & b_8 & & \end{pmatrix},$$

indem ich links die Grenzlösung, rechts innerhalb der Klammern die Ecken ihrer Basis in irgend einer Anordnung, aus der man ihre gegenseitige Lage erkennen kann, hinschreibe.

Die dreifachen Kontinuen der Basen von a und b_1 müssen sich in einem zweifachen linearen Kontinuum schneiden. Unter den 12 von b_1 ausgehenden Kanten des Polyschems sind nun 6 schon bekannt; es sind die, welche nach a, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 gehen. Diese Ecken gehören also der Basis von b_1 an, und die fünf letzten derselben hat sie mit der Basis von a gemein. Jenes zweifache Kontinuum ist also die Ebene des Fünfeckschnitts $b_2\, b_3\, b_4\, b_5\, b_6$; und in Beziehung auf denselben kann man a und b_1 vertauschen. Das Eck b_1 kann demnach durch die Formel

$$b_1 \begin{pmatrix} & & a & & \\ b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ x & . & . & . & . \\ & & . & & \end{pmatrix}$$

dargestellt werden, wo x einen der noch unbekannten Scheitel der Basis bezeichnet. Wiederholt man das gleiche Verfahren in Beziehung auf die beiden Formeln für a und b_1, um Formeln für b_2 und b_3 zu erhalten, so werden diese

$$b_2 \begin{pmatrix} & & a & & \\ b_1 & b_3 & b_7 & b_{11} & b_6 \\ x & . & . & . & . \\ & & . & & \end{pmatrix}, \qquad b_3 \begin{pmatrix} & & a & & \\ b_1 & b_4 & b_8 & b_7 & b_2 \\ . & . & . & . & x \\ & & . & & \end{pmatrix};$$

einzig in diesen Formeln für b_1, b_2, b_3 kann das neue Eck x vorkommen, weil unter allen bis jetzt bekannten Ecken nur diese mit x durch Kanten verbunden sind. Die Zahl aller ähnlichen neuen Scheitel ist demnach $\frac{12.5}{3} = 20$; sie entsprechen den Flächen des Ikosaeders und sollen durch $c_1, c_2, \ldots c_{20}$ bezeichnet werden. Die mit a diametral entgegengesetzten Scheitel der Basen von $b_1, b_2, \ldots b_{12}$ mögen $d_1, d_2, \ldots d_{12}$ heissen.

Demnach sind jetzt die vollständigen Formeln für die Ecken b_1, b_2, b_3, welche wir darum gerade anführen, weil nur diese den Scheitel c_1 enthalten, folgende:

$$b_1\left(\begin{matrix} & & a & & \\ b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ & & d_1 & & \end{matrix}\right),\quad b_2\left(\begin{matrix} & & a & & \\ b_1 & b_3 & b_7 & b_{11} & b_6 \\ c_1 & c_6 & c_{15} & c_{10} & c_5 \\ & & d_2 & & \end{matrix}\right),\quad b_3\left(\begin{matrix} & & a & & \\ b_1 & b_4 & b_8 & b_7 & b_2 \\ c_2 & c_7 & c_{11} & c_6 & c_1 \\ & & d_3 & & \end{matrix}\right).$$

Sie geben für das Eck c_1 die Formel:

$$c_1\left(\begin{matrix} & & b_1 & & \\ b_2 & b_3 & c_2 & d_1 & c_5 \\ c_6 & d_3 & x & . & d_2 \\ & & . & & \end{matrix}\right).$$

Von den drei noch unbekannten Scheiteln der Basis kann der mit x bezeichnete nur in den Formeln der benachbarten Ecken c_2, d_1, d_3 vorkommen. (Die beiden nicht bezeichneten verhalten sich ähnlich). Jeder mit x analoge Scheitel kommt also in den 20 Formeln für c nur zweimal vor; ihre Anzahl ist daher $\frac{20.3}{2} = 30$; sie entsprechen den Kanten und sollen mit e bezeichnet werden; jenes x z. B. wird, da es der den Flächen 1, 2 gemeinschaftlichen Kante entspricht, zu e_2. Wir bekommen so für die Ecken c der ersten Horizontalzeile, deren Basen den Scheitel d_1 gemein haben, die Formeln:

$$c_1\left(\begin{matrix} & & b_1 & & \\ b_2 & b_3 & c_2 & d_1 & c_5 \\ c_6 & d_3 & e_2 & e_1 & d_2 \\ & & e_6 & & \end{matrix}\right),\quad c_2\left(\begin{matrix} & & b_1 & & \\ b_3 & b_4 & c_3 & d_1 & c_1 \\ c_7 & d_4 & e_3 & e_2 & d_3 \\ & & e_7 & & \end{matrix}\right),\quad c_3\left(\begin{matrix} & & b_1 & & \\ b_4 & b_5 & c_4 & d_1 & c_2 \\ c_8 & d_5 & e_4 & e_3 & d_4 \\ & & e_8 & & \end{matrix}\right),$$

$$c_4\left(\begin{matrix} & & b_1 & & \\ b_5 & b_6 & c_5 & d_1 & c_3 \\ c_9 & d_6 & e_5 & e_4 & d_5 \\ & & e_9 & & \end{matrix}\right),\quad c_5\left(\begin{matrix} & & b_1 & & \\ b_6 & b_2 & c_1 & d_1 & c_4 \\ c_{10} & d_2 & e_1 & e_5 & d_6 \\ & & e_{10} & & \end{matrix}\right).$$

Aus der früheren Formel für b_1 und aus diesen fünf ergiebt sich folgende Formel für d_1, welches anderswo bis jetzt nicht vorgekommen ist:

$$d_1\left(\begin{matrix} & & b_1 & & \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_1 \\ & & . & & \end{matrix}\right).$$

Der einzige hier fehlende Scheitel kann sonst in keiner der 12 Formeln für die d vorkommen. Alle analogen Scheitel sind daher auch 12 an der Zahl; wir bezeichnen sie mit f, den hier fehlenden z. B. mit f_1.

Der Scheitel e_1 findet sich nur in den Formeln für c_1, c_5, d_1, d_2; die zwei letzten sind:

$$d_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5 \\ e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5 \quad e_1 \\ f_1 \end{pmatrix}, \quad d_2 \begin{pmatrix} b_2 \\ c_1 \quad c_6 \quad c_{15} \quad c_{10} \quad c_5 \\ e_6 \quad e_{11} \quad e_{20} \quad e_{10} \quad e_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

Aus diesen 4 Formeln zusammen ergiebt sich die Formel

$$e_1 \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \quad c_5 \quad d_2 \quad e_6 \quad e_2 \\ e_5 \quad e_{10} \quad f_2 \quad . \quad f_1 \\ . \end{pmatrix}.$$

Der eine hier noch fehlende Scheitel kann unter allen 30 Formeln für die e nur in denen für e_1, e_2, e_6, der andere nur in denen für e_1, e_5, e_{10} vorkommen. Jener entspricht also dem von den Kanten 1, 2, 6 umschlossenen Dreieck 1, dieser dem Dreieck 5. Die analogen Scheitel sollen mit g bezeichnet werden; ihre Zahl ist $\frac{30 \cdot 2}{3} = 20$. Wir bekommen so folgende Formeln:

$$e_1 \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \quad c_5 \quad d_2 \quad e_6 \quad e_2 \\ e_5 \quad e_{10} \quad f_2 \quad g_1 \quad f_1 \\ g_5 \end{pmatrix}, \quad e_2 \begin{pmatrix} c_2 \\ d_1 \quad c_1 \quad d_3 \quad e_7 \quad e_3 \\ e_1 \quad e_6 \quad f_3 \quad g_2 \quad f_1 \\ g_1 \end{pmatrix}, \quad e_3 \begin{pmatrix} c_3 \\ d_1 \quad c_2 \quad d_4 \quad e_8 \quad e_4 \\ e_2 \quad e_7 \quad f_4 \quad g_3 \quad f_1 \\ g_2 \end{pmatrix},$$

$$e_4 \begin{pmatrix} c_4 \\ d_1 \quad c_3 \quad d_5 \quad e_9 \quad e_5 \\ e_3 \quad e_8 \quad f_5 \quad g_4 \quad f_1 \\ g_3 \end{pmatrix}, \quad e_5 \begin{pmatrix} c_5 \\ d_1 \quad c_4 \quad d_6 \quad e_{10} \quad e_1 \\ e_4 \quad e_9 \quad f_6 \quad g_5 \quad f_1 \\ g_4 \end{pmatrix}, \quad e_6 \begin{pmatrix} c_1 \\ d_2 \quad c_6 \quad d_3 \quad e_2 \quad e_1 \\ e_{11} \quad e_{16} \quad f_3 \quad g_1 \quad f_2 \\ g_6 \end{pmatrix}.$$

Unter den bis jetzt gefundenen Formeln sind die für d_1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 die einzigen, in denen f_1 vorkommt. Sie geben

$$f_1 \begin{pmatrix} d_1 \\ e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5 \\ g_1 \quad g_2 \quad g_3 \quad g_4 \quad g_5 \\ h_1 \end{pmatrix},$$

wo wir den neuen Scheitel schon mit h_1 bezeichnet haben, weil es sogleich klar ist, dass er in allen 12 ähnlichen Formeln nur einmal gerade hier vorkommt und daher dem f_1 oder dem Ikosaedereck 1 entspricht.

g_1 kommt vor nur in den Formeln für $e_1, e_2, e_6, f_1, f_2\, f_3$; von diesen sind die zwei letzten:

$$f_2\left(\begin{array}{ccccccccc} & & & & d_2 & & & & \\ e_1 & & e_6 & & e_{11} & & e_{20} & & e_{10} \\ & g_1 & & g_6 & g_{15} & g_{10} & & g_5 & \\ & & & & h_2 & & & & \end{array}\right),\quad f_3\left(\begin{array}{ccccccccc} & & & & d_3 & & & & \\ e_2 & & e_7 & & e_{12} & & e_{16} & & e_6 \\ & g_2 & & g_7 & g_{11} & g_6 & & g_1 & \\ & & & & h_3 & & & & \end{array}\right).$$

Alle sechs Formeln geben

$$g_1\left(\begin{array}{ccccc} & & e_1 & & \\ e_6 & e_2 & f_1 & g_5 & f_2 \\ f_3 & g_2 & h_1 & h_2 & g_6 \\ & & h_3 & & \end{array}\right);$$

alle Ecken der Basis von g_1 sind also schon vollständig vorhanden.

h_1 kommt bis jetzt vor nur in den Formeln für $f_1, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$. Sie geben

$$h_1\left(\begin{array}{ccccc} & & f_1 & & \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 \\ h_3 & h_4 & h_5 & h_6 & h_2 \\ & & i & & \end{array}\right).$$

Der neue Scheitel i muss in den Formeln aller benachbarten Scheitel h_2, h_3, h_4, h_5, h_6 sich wieder finden. Er ist daher einzig in seiner Art, hat die vollständige Formel

$$i\left(\begin{array}{ccccc} & & h_1 & & \\ h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 \\ h_7 & h_8 & h_9 & h_{10} & h_{11} \\ & & h_{12} & & \end{array}\right)$$

und schliesst daher das Polyschem zu.

Die Ecken a und i waren einzeln, die b, d, f, h zu 12, die c und g zu 20, die e zu 30. Das Polyschem hat also 120 Ecken, 720 Kanten, 1200 Dreiecke und 600 Tetraeder; es möge Hexakosioschem heissen.

Die hier ausgeführte Konstruktion ist von der einfachen oder überschlagenen Beschaffenheit der ikosaedrischen Basis eines Ecks unabhängig. Da nun $\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{5} > \cos\frac{\pi}{3}$ und daher die Zusammenfügung eines Ecks möglich ist, so ist durch das vorige auch die Existenz des überschlagenen Hexakosioschems $\left(3,\ 3,\ \frac{5}{2}\right)$ bewiesen.

4. Sind x, y, z, w orthogonale Variabeln, so können diese auf 6 Arten zu zweien kombiniert werden; bei zwei Variabeln können die Vorzeichen auf 4 Arten variiert werden. Es giebt also im ganzen 24 Gleichungen von der Form $x + y = 1$; diese nun stellen den Umschluss des Polyschems (3, 4, 3) dar. Das Oktaeder $(x + y = 1)$ hat die Ecken (1, 0, 0, 0), ($^1/_2$, $^1/_2$, $^1/_2$, $^1/_2$), ($^1/_2$, $^1/_2$, — $^1/_2$, $^1/_2$), ($^1/_2$, $^1/_2$, — $^1/_2$, — $^1/_2$), ($^1/_2$, $^1/_2$, $^1/_2$ — $^1/_2$), (0, 1, 0, 0). Auf den Axen liegen 8 Ecken, wie (1, 0, 0, 0), (— 1, 0, 0, 0), etc.; ausser

diesen giebt es noch 16 Ecken, wie $(^1/_2, ^1/_2, ^1/_2, ^1/_2)$. Im Eck $(1, 0, 0, 0)$ treffen die 6 Oktaeder, $x \pm y = 1$, $x \pm z = 1$, $x \pm w = 1$, zusammen; im Eck $(^1/_2, ^1/_2, ^1/_2, ^1/_2)$ die 6 Oktaeder, $x + y = 1$, $x + z = 1$, $z + y = 1$, $y + w = 1$, $w + x = 1$, $z + w = 1$. Der Abstand jedes Ecks vom Ursprung ist 1; jede Kante ist 1. Das Centrum des Oktaeders $(x + y = 1)$ ist $(^1/_2, ^1/_2, 0, 0)$, sein Abstand vom Ursprung also $\sqrt{\frac{1}{2}}$, gleich dem Radius der dem Oktaeder umschriebenen Kugel. Wir nennen dieses Polyschem $(3, 4, 3)$ nach der Zahl seiner Grenzoktaeder Eikositetraschem. Es hat 24 Ecken, 96 Kanten, 96 Dreiecke und 24 Oktaeder. Will man eines der 16 Ecken $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ als Axenende erscheinen lassen, so braucht man nur die Variabeln mittelst der orthogonalen Formeln

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2} x' + \tfrac{1}{2} y' + \tfrac{1}{2} z' + \tfrac{1}{2} w', \\ y &= \tfrac{1}{2} x' + \tfrac{1}{2} y' - \tfrac{1}{2} z' - \tfrac{1}{2} w', \\ z &= \tfrac{1}{2} x' - \tfrac{1}{2} y' + \tfrac{1}{2} z' - \tfrac{1}{2} w', \\ w &= \tfrac{1}{2} x' - \tfrac{1}{2} y' - \tfrac{1}{2} z' + \tfrac{1}{2} w' \end{aligned}$$

zu transformieren; die Determinante dieser Transformationselemente ist -1. Eine andere orthogonale Transformation ist

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot x' + \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot y' \qquad , \\ y &= -\sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot x' + \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot y' \qquad , \\ z &= \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot z' + \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot w', \\ w &= -\sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot z' + \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot w'; \end{aligned}$$

im neuen Systeme sind dann alle 24 Ecken auf ähnliche Weise, z. B. durch $(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, 0, 0)$ dargestellt, hingegen von den Grenzkontinuen acht durch Gleichungen, wie $x' = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und die 16 übrigen durch Gleichungen, wie $x' + y' + z' + w' = \sqrt{2}$.

Man wird leicht erkennen, dass dieses Polyschem $(3, 4, 3)$ eine Kombination des Hekkaidekaschems $(3, 4, 3)$ und des sogleich näher zu beschreibenden Oktaschems $(4, 3, 3)$ ist.

5. Das Polyschem $(4, 3, 3)$ ist zum Hekkaidekaschem $(3, 3, 4)$ reciprok; seine Existenz ist hierdurch schon bewiesen; es hat 16 Ecken, 32 Kanten, 24 Quadrate und 8 Würfel, und möge daher Oktaschem heissen. Als Gleichungen der acht Grenzkontinua kann man $w = \pm 1$, $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$ setzen; dann geben z. B. die Bedingungen $w = +1$, $-1 < x > 1$, $-1 < y < 1$, $-1 < z < 1$ einen Würfel. Die Ecken sind $(1, 1, 1, 1)$, und alle übrigen, welche sich hieraus durch Variation der Vorzeichen ergeben. Das Oktaschem ist das vierfache orthogonale Paralleloschem, dessen Kanten alle gleich sind.

6. Die Existenz des Polyschems $(5, 3, 3)$ ist schon durch seine Reciprozität zum Hexakosioschem $(3, 3, 5)$ bewiesen. Das es 600 Ecken, 1200 Kanten, 720 Fünfecke,

120 Dodekaeder hat, so möge es **Hekatonkaieikosaschem** heissen. Es giebt zwei Arten desselben, ein **einfaches**, das eigentliche $(5, 3, 3)$, und ein **überschlagenes** $\left(\frac{5}{2}, 3, 3\right)$, welches von überschlagenen Dodekaedern $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$ umschlossen wird.

Ich lasse hier eine Uebersicht der Massverhältnisse der vierfachen regulären Polyscheme folgen. Die Kante eines jeden ist als lineare Einheit angenommen. Es sei O das Centrum des Polyschems, AB eine Kante eines Grenzpolyeders, N dessen Centrum, $OA = R$, $NA = K$, $ON = r$, $\angle AOB = a$; ferner sei $\varrho = \cos\frac{a}{2}$ der Radius der einer Basis eines Ecks umschriebenen Kugel, K' der Radius der einem Grenzpolyeder eingeschriebenen Kugel, n die Zahl der Grenzpolyeder, P der räumliche Inhalt eines solchen, und S das Mass der vom Polyschem umschlossenen Totalität; endlich sei δ der Winkel zwischen zweien benachbarten Grenzkontinuen, d. h., wenn $ax + by + cz + dw = r$, $a'x + b'y + c'z + d'w = r$, (wo $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, $a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 = 1$) die Gleichungen dieser Grenzkontinuen sind, so sei $aa' + bb' + cc' + dd' = -\cos\delta$. Dann ist

$$R = \frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}, \quad r = \sqrt{R^2 - K^2}, \quad \operatorname{cotg}\frac{\delta}{2} = \frac{K'}{r}, \quad S = \frac{n}{4}Pr.$$

1. **Pentaschem.** $\varrho = \sqrt{\frac{3}{8}}$, $\cos a = -\frac{1}{4}$, $R = \sqrt{\frac{2}{5}}$, $K = \sqrt{\frac{3}{8}}$, $K' = \sqrt{\frac{1}{24}}$, $r = \sqrt{\frac{1}{40}} = \frac{1}{4}R$, $\cos\delta = \frac{1}{4}$, $S = \frac{\sqrt{5}}{96} = \frac{25\sqrt{5}}{384}R^4$.

2. **Hekkaidekaschem.** $\varrho = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $a = \frac{\pi}{2}$, $R = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $K = \sqrt{\frac{3}{8}}$, $K' = \sqrt{\frac{1}{24}}$, $r = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}R$, $\delta = \frac{2\pi}{3}$, $S = \frac{1}{6} = \frac{2}{3}R^4$.

3. **Einfaches Hexakosioschem.** $\varrho = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$, $a = \frac{\pi}{5}$, $R = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $r = \frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{2}}$. $\operatorname{cotg}\frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}}$ $\sin\delta = \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{10}$, $S = \frac{25(\sqrt{5}+2)}{4} = \frac{25(\sqrt{5}-1)}{8}R^4$.

4. **Ueberschlagenes Hexakosioschem.** $a = \frac{3\pi}{5}$, $R = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $r = \frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{2}}$, $\operatorname{cotg}\frac{\delta}{2} = \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}}$.

5. **Eikositetraschem.** $\varrho = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a = \frac{\pi}{3}$, $R = 1$, $K = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $K' = \sqrt{\frac{1}{6}}$, $r = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\delta = \frac{2\pi}{3}$, $S = 2 = 2R^4$.

6. Oktaschem. $\varrho = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $a = \frac{\pi}{3}$, $R = 1$, $K = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $K' = \frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{2}$, $\delta = \frac{\pi}{2}$, $S = 1$.

7. Einfaches Hekatonkaieikosaschem. $\varrho = \sqrt{\frac{3}{8}} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\operatorname{tang} \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}}$, $R = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$, $K = \frac{\sqrt{5}+1}{4}\sqrt{3}$, $K' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^5}$, $r = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^4$, $\delta = \frac{4\pi}{5}$, $S = \frac{15\sqrt{5}}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^8 = \frac{15\sqrt{5}}{8} R^4$.

8. Ueberschlagenes Hekatonkaieikosaschem. $\operatorname{tang} \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}}$, $R = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$, $r = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4$, $\delta = \frac{2\pi}{5}$.

Wie das Eck des Polyschems (m, n, p) durch seine Basis (n, p) und den Wert von ϱ bestimmt war, ebenso ist das centrale Eck O, welches das Grenzpolyeder (m, n) zur Basis hat, durch diese und durch den Wert von $\frac{K}{R}$ bestimmt. Ist nun eines jener äusserlichen Ecken mit irgend einem der centralen kongruent, so ist das jenem angehörige Polyeder geeignet, durch Aneinanderreihung die vierfache Totalität auszufüllen. Nun ist $\varrho\,(3, 3, 4) = \frac{K}{R}(3, 4, 3) = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $\varrho\,(3, 4, 3) = \frac{K}{R}\,(4, 3, 3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varrho\,(4, 3, 3) = \frac{K}{R}\,(3, 3, 4)$. Die vierfache Totalität wird also stetig erfüllt: 1. durch Hekkaidekascheme, indem deren 24 um eine Lösung herumliegen, und die oktaedrischen Basen der hier zusammenstossenden Ecken ein Eikositetraschem bilden, Charakter (3, 3, 4, 3); 2. durch Eikositetrascheme, indem deren 8 um eine Lösung herumliegen, und die hexaedrischen Basen der vereinigten Ecken ein Oktaschem bilden, Charakter (3, 4, 3, 3); 3. durch Oktascheme, indem deren 16 um eine Lösung herumliegen, und die tetraedrischen Basen der vereinigten Ecken ein Hekkaidekaschem bilden, Charakter (4, 3, 3, 4).

§ 18. Reguläre Polyscheme der fünffachen und aller mehrfachen Totalitäten.

Was in der fünffachen Totalität der Charakter (m, n, p, q) eines regulären Polyschems bedeuten soll, ist nach dem Vorhergegangenen wohl ohne Erklärung zu verstehen. Damit nun ein solches Polyschem existieren könne, müssen in der vierfachen Totalität die regulären Polyscheme (m, n, p) und (n, p, q) schon existieren, und der Ausdruck

$$\left(\sin^2 \frac{\pi}{m} - \cos^2 \frac{\pi}{n}\right)\left(\sin^2 \frac{\pi}{q} - \cos^2 \frac{\pi}{p}\right) - \cos^2 \frac{\pi}{n} \cos^2 \frac{\pi}{p}$$

muss positiv sein. Für ganze Zahlen m, n, p, q entsprechen diesen Bedingungen nur

die drei Charaktere (3, 3, 3, 3), (3, 3, 3, 4) und (4, 3, 3, 3). (Es giebt auch nur drei Charaktere, für welche der letzte Ausdruck verschwindet, nämlich (3, 4, 3, 3), (3, 3, 4, 3) und (4, 3, 3, 3), welche, wie wir schon wissen, alle Arten anzeigen, auf welche die vierfache Totalität durch reguläre Polyscheme ausgefüllt werden kann.) Die Existenz der entsprechenden Polyscheme ist leicht zu beweisen. Das erste ist die Pyramide mit lauter gleichen Kanten; das letzte ist das orthogonale Paralleloschem mit gleichen Kanten, und das zweite das reciproke des letzten.

Ueberhaupt existieren in der $n$fachen Totalität drei reguläre Polyscheme: 1. die Pyramide vom Charakter (3, 3, 3 . . . 3, 3), 2. das orthogonale Paralleloschem vom Charakter (4, 3, 3 . . . 3, 3), 3. das diesem reciproke Polyschem (3, 3, 3 . . . 3, 4).

Es leuchtet auch sogleich ein, dass durch das Paralleloschem die Totalität erfüllt werden kann, und dass diese Erfüllung durch den Charakter (4, 3, 3 . . . 3, 3, 4) dargestellt wird.

Wenn nun für die $(n-1)$fache Totalität nur die drei angeführten regulären Polyscheme existieren, so sind für die $n$fache Totalität nur vier Charaktere denkbar: 1. wo alle Elemente gleich 3 sind, 2. wo die $n-2$ ersten 3 und das letzte 4 sind, 3. wo dieselben Elemente in umgekehrter Ordnung stehen, 4. wo das erste und letzte Element 4, alle übrigen 3 sind. Da aber der letzte Charakter die Erfüllung der $(n-1)$-fachen Totalität anzeigt, so giebt es auch für die $n$fache Totalität nur drei reguläre Polyscheme.

Da nun schon in der fünffachen Totalität nur die drei erwähnten regulären Polyscheme existieren, so existieren überhaupt in der $n$fachen Totalität nur diese drei, sobald $n > 4$ ist. Wir wollen nun diese regulären Polyscheme etwas näher betrachten.

1. Reguläre Pyramide. Die $n+1$ Grenzkontinuen sind durch ebenso viele Gleichungen dargestellt. Zur Bildung eines $i$fachen Grenzkontinuums werden $n-i$ von diesen Gleichungen erfordert; es giebt $\binom{n+1}{n-i}$ Kombinationen dieser Art; wenn also a_i die Zahl der $i$fachen Grenzkontinuen bezeichnet, so ist $a_i = \binom{n+1}{i+1}$. Sind ferner S, B, h resp. das Mass, die Basis und die Höhe der $n$fachen Pyramide, so ist nach dem Schlusse von § 8:

$$S = \frac{1}{1.2\ldots n}\sqrt{\frac{n+1}{2^n}} = \frac{1}{n}Bh, \quad B = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}};$$

folglich $h = \sqrt{\frac{n+1}{2n}} = \sin\frac{a}{2}$, wenn a den Winkel bezeichnet, unter dem die Kante vom Centrum aus erscheint, also auch $\cos a = -\frac{1}{n}$, und, wenn δ den Winkel zwischen zweien $(n-1)$fachen Grenzkontinuen bedeutet, $\cos\delta = \frac{1}{n}$. Wird die Kante als lineare Einheit angenommen, der Abstand eines Ecks vom Centrum durch R, derjenige eines

$(n-1)$fachen Grenzkontinuums durch r bezeichnet, so ist $R = \frac{\frac{1}{2}}{\sin\frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}}$, $r = h - R = \frac{1}{\sqrt{2n(n+1)}} = \frac{R}{n}$, $S = \frac{1}{n!}\sqrt{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}} \cdot R^n$. Setzt man abkürzend $\frac{1}{n} = \cos\delta$, $\frac{1}{n-1} = \cos\delta_1$, $\frac{1}{n-2} = \cos\delta_2, \ldots \frac{1}{2} = \cos\delta_{n-2}$, bezeichnet die Variabeln mit $x_1, x_2, \ldots x_n$ und die Polynome der Gleichungen der Grenzkontinuen mit $p, p_1, p_2, \ldots p_n$, so kann man setzen: $p_o = x_1$,

$$\frac{p_m}{\cos\frac{\delta}{2}} = -\cos\delta\,\frac{x_1}{\cos\frac{\delta}{2}} - \cos\delta_1\,\frac{x_2}{\cos\frac{\delta_1}{2}} - \cdots - \cos\delta_i\,\frac{x_{i+1}}{\cos\frac{\delta_i}{2}} - \cdots - \cos\delta_{m-1}\,\frac{x_m}{\cos\frac{\delta_{m-1}}{2}}$$

$$+ \frac{x_{m+1}}{\cos\frac{\delta_m}{2}} \text{ für } m = 1, 2, 3, \ldots n-1;$$

$$\frac{p_n}{\cos\frac{\delta}{2}} = -\cos\delta\,\frac{x_1}{\cos\frac{\delta}{2}} - \cos\delta_1\,\frac{x_2}{\cos\frac{\delta_1}{2}} - \cdots\cdots - \cos\delta_{n-2}\,\frac{x_{n-1}}{\cos\frac{\delta_{n-2}}{2}} - x_n + 1.$$

Das durch die Gleichungen $p = o$, $p_1 = o$, $p_2 = o, \ldots$, $p_{m-1} = o$, $p_{m+1} = o, \ldots p = o$ bestimmte Eck hat dann folgende Werte der Variabeln:

$x_1 = x_2, = \cdots = x_m = o$, $x_{m+1} = \cos\frac{\delta_m}{2}$, $x_{m+2} = \cos\delta_m \cos\frac{\delta_{m+1}}{2}, \ldots . x_{i+1} = \cos\delta_{i-1}\cos\frac{\delta_i}{2}$, $\ldots . x_{n-1} = \cos\delta_{n-3}\cos\frac{\delta_{n-2}}{2}$, $x_n = \cos\delta_{n-2}$.

2. **Reciprok-Paralleloschem** (3, 3, ... 3, 4). Sein Umschluss kann durch Gleichungen wie

$$-x_1 - x_2 - x_3 - \cdots - x_n + \sqrt{\frac{1}{2}} = o$$

dargestellt werden, wo die Vorzeichen der Variabeln auf alle möglichen Arten zu variieren sind. Es giebt also 2^n solche Gleichungen. Die Ecken sind z. B. $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = o$; da die Vorzeichen der nicht verschwindenden Variabeln nach Belieben zu nehmen sind, so giebt es $2n$ Ecken. Irgend ein $i$faches Grenzkontinuum geht durch $i+1$ Ecken, von denen keine zwei einander diametral entgegengesetzt sind; sieht man von den Vorzeichen ab, so giebt es $\binom{n}{i+1}$ Kombinationen; die $i+1$ Vorzeichen aber können auf 2^{i+1} Arten variiert werden; folglich ist die Zahl der $i$fachen Grenzkontinuen

$$a_i = 2^{i+1}\binom{n}{i+1}.$$

Gilt die Kante als lineare Einheit, so ist $a = \frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{1}{n}}$, $R = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $r = \sqrt{\frac{1}{2n}}$, $S = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{1.2\ldots n} = \frac{2^n}{1.2\ldots n}R^n$.

3. **Reguläres Parallelschem** (4, 3, ... 3, 3). Sein Umschluss wird durch die $2n$ Gleichungen $x_1 = \pm \frac{1}{2}$, $x_2 = \pm \frac{1}{2}, \ldots x_n = \pm \frac{1}{2}$ dargestellt, wenn die Kante als lineare Einheit gilt. Die Zahl der $i$fachen Grenzkontinua (lauter Paralleloscheme) ist $a_i = 2^{n-i}\binom{n}{i}$. Eines der 2^n Ecken ist $(x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, \ldots x_n = \frac{1}{2})$; die übrigen erhält man durch Variation der Vorzeichen.

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1}{n}}, \quad \delta = \frac{\pi}{2}, \quad R = \frac{\sqrt{n}}{2}, \quad r = \frac{1}{2}, \quad S = 1 = \frac{2^n}{n^{\frac{n}{2}}} R^n.$$

Zweiter Teil.

Lehre von den sphärischen Kontinuen.

§ 19. *Einleitung. — Begriff der Polysphäre, Mass derselben und ihres Umschlusses.*

Dieser Abschnitt ist der Betrachtung des $n$fachen Integrals $P_n = \int^n dxdydz \dots$, begrenzt durch $x^2 + y^2 + \dots < 1$ und durch n lineare und homogene, unter sich unabhängige Polynome, welche z. B. nie negativ werden dürfen, gewidmet. Obschon P_n zunächst als Funktion der nn Koeffizienten dieser Grenzpolynome erscheint, so ist doch leicht zu zeigen, dass nur $\frac{1}{2}n(n-1)$ Unabhängige vorhanden sind, die sich immer gleich bleiben, welche orthogonale Transformation auch mit den Variabeln vorgenommen werden mag; eine solche Unabhängige ist nämlich die Summe der Produkte der gleichnamigen Koeffizienten je zweier Grenzpolynome, vorausgesetzt, dass die Summe der Quadrate der Koeffizienten eines jeden Polynoms der Einheit gleich sei. Wird für $n=2$ das Integral P_2 geometrisch aufgefasst, so stellt es den Inhalt eines Kreisausschnitts dar, und die einzige Unabhängige ist der Kosinus des Mittelpunktswinkels; wir werden der Konsequenz wegen in diesem Falle eine notwendige Integration annehmen, da der Ausschnitt, oder, wenn man lieber will, der Kreisbogen eine transcendente Funktion seines Kosinus ist. In diesem Sinne können wir sagen, dass das ursprüngliche $n$fache Integral P_n nur $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n-1}{2}$ notwendige Integrationen erfordert, je nachdem seine Dimensionszahl n gerade oder ungerade ist. Es wird sich nämlich zeigen, dass im letzten Fall das Integral P_{2n+1} als lineare Funktion von Integralen $P_{2n}, P_{2n-2}, \dots P_4, P_2$ dargestellt werden kann. Während diese Reduktion ungerade Dimensionszahlen betrifft, bringt eine andere nicht minder merkwürdige die Zahl $\frac{1}{2}n(n-1)$ der Unabhängigen auf $n-1$ herunter. Die allgemeine Funktion P_n kann nämlich auf n Arten als ein Aggregat von $1.2.3.4\dots(n-1)$ speziellen Funktionen Q_n dargestellt werden; wenn bei einer solchen Q_n die Grenzpolynome passend geordnet sind, so ist die Summe der Produkte der Koeffizienten je zweier benachbarter im allgemeinen eine von Null verschiedene Unabhängige, die Zahl dieser Unabhängigen demnach $n-1$; alle anderen

Produktsummen dagegen sind Null. Nachdem einige diese besondere Klasse von Funktionen betreffende Sätze, finite Relationen zwischen denselben enthaltend, bewiesen und zu Wertbestimmungen benutzt worden sind, werden diese letzten noch mit Hilfe der regulären Polyscheme des vorigen Abschnitts verifiziert, und nehmen wir hievon Anlass, ganz besonders die Theorie der regulären Polyscheme der vierfachen Totalität zu vervollständigen.

Erklärung. Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ orthogonale Variabeln, so ist die durch die Bedingung

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < a^2$$

umschlossene Totalität eine n-Sphäre oder Polysphäre; a ist ihr Radius, und die Lösung mit den Nullwerten sämtlicher Variabeln ihr Centrum. Demnach würde der Kreis Disphäre, die Kugel Trisphäre heissen.

Wir sagen, eine Lösung sei innerhalb, auf oder ausserhalb einer Polysphäre, wenn ihr Abstand vom Centrum kleiner, gleich oder grösser als der Radius ist. Das $(n-1)$fache höhere Kontinuum, welches alle auf der Polysphäre befindlichen Lösungen enthält, also dieselbe umschliesst, heisst totales sphärisches Kontinuum; ein Stück desselben, welches von $(n-1)$fachen durchs Centrum gehenden linearen Kontinuen begrenzt wird, sphärisches Polyschem, und im Besondern Plagioschem, wenn die Zahl der begrenzenden Kontinuen n ist. (Dieses ist nämlich die kleinste Zahl, wo die Eigentümlichkeit der n-Sphäre sich offenbaren kann; für eine noch kleinere Zahl begrenzender Kontinuen sinkt das Polyschem, als analytische Funktion betrachtet, auf eine niedrigere Stufe herab.) Die einzelnen Stücke, aus denen die ganze Begrenzung besteht, nennen wir Perischeme, und zwar haben wir zunächst $(n-1)$sphärische Perischeme, deren jedes wiederum von einer Menge $(n-2)$sphärischer Perischeme begrenzt ist, u. s. f. Die disphärischen Perischeme endlich mögen Seiten und die monosphärischen Ecken heissen.

Jedes Element des sphärischen Kontinuums ist zu seinem Abstand vom Centrum (seinem Radius) normal, weil

$$x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + \cdots + x_n\, dx_n = o$$

ist; seine Projektionsfaktoren sind also

$$\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{a}, \ldots \frac{x_n}{a};$$

daher kann es durch

$$\frac{a}{x_1} dx_2\, dx_3 \ldots dx_n, \quad \frac{a}{x_2} dx_1\, dx_3\, dx_4 \ldots dx_n, \ldots$$

ausgedrückt werden.

Setzt man

$$x_1 = r\cos\varphi_1,\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\ x_3 = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \ldots,$$
$$x_m = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\ldots\sin\varphi_{m-1}\cos\varphi_m, \ldots\ldots, x_n = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\ldots\sin\varphi_{n-1},$$



so heissen $r, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ sphärische Variabeln. Variiert man immer nur eine dieser neuen Variabeln, während alle übrigen konstant bleiben, so durchläuft die Lösung die Wegelemente

$$dr,\ r d\varphi_1,\ r \sin\varphi_1\, d\varphi_2,\ r \sin\varphi_1 \sin\varphi_2\, d\varphi_3, \ldots,\ r \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \ldots \sin\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-1},$$

deren Projektionsfaktoren das orthogonale System

$$\begin{array}{llllll}
\cos\varphi_1, & \sin\varphi_1\cos\varphi_2, & \sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,\ldots, & \sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, & \sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}, \\
-\sin\varphi_1, & \cos\varphi_1\cos\varphi_2, & \cos\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,\ldots, & \cos\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, & \cos\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}, \\
o, & -\sin\varphi_2, & \cos\varphi_2\cos\varphi_3,\ldots, & \cos\varphi_2\sin\varphi_3\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, & \cos\varphi_2\sin\varphi_3\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}, \\
o, & o, & -\sin\varphi_3,\ldots, & \cos\varphi_3\ldots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, & \cos\varphi_3\ldots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
o & o, & o,\ldots, & -\sin\varphi_{n-1}, & \cos\varphi_{n-1}
\end{array}$$

bilden. Das Element $dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ der Totalität verwandelt sich demnach in

$$r^{n-1} \sin^{n-2}\varphi_1 \sin^{n-3}\varphi_2 \ldots \sin^2\varphi_{n-3} \sin\varphi_{n-2}\, dr\, d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_{n-1},$$

und, wenn man hier den Faktor dr weglässt, so hat man einen Ausdruck für das Element des sphärischen Kontinuums vom Radius r anstatt des früheren $\frac{r}{x_1} dx_2\, dx_3 \ldots dx_n$.

Ist nun

$$K = \int^{n} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \quad (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < a^2), \qquad S = \int^{n-1} \frac{a}{x_1}\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_n \quad (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 = a^2),$$

d. h. sind K, S die Masse der Polysphäre und des totalen sphärischen Kontinuums, so hat man auch

$$S = a^{n-1} \int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1\, d\varphi_1 \int_0^\pi \sin^{n-3}\varphi_2\, d\varphi_2 \ldots \int_0^\pi \sin\varphi_{n-2}\, d\varphi_{n-2} \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1},$$

$$K = \frac{S}{a^{n-1}} \int_0^a r^{n-1}\, dr,$$

oder, weil

$$\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi\, d\varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

ist,

$$S = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} a^{n-1}, \quad K = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} a^n.$$

Für $a = 1$ und $n = 4, 5, 6$ ist S resp. $2\pi^2, \frac{8}{3}\pi^2, \pi^3$.

§ 20. *Gegenseitige Abhängigkeit der Stücke eines sphärischen Plagioschems.*

Es sei $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ die Gleichung des sphärischen Kontinuums,

$$S = \int^{n-1} \frac{dx_2\, dx_3 \ldots dx_n}{x_1}$$

das Mass eines Teils, welcher alle den Bedingungen $p_1 > o, p_2 > o, \ldots, p_n > o$ genügenden Lösungen enthält, wenn $p_1, p_2, \ldots, p_n$ unter sich unabhängige lineare und homogene Polynome bezeichnen. Es steht frei, anzunehmen, dass in jedem Polynom die Summe der Quadrate der Koeffizienten gleich 1 sei. Dann sei z. B. — cos (12) die Summe der Produkte der gleichnamigen Koeffizienten in den Polynomen p_1, p_2, und (12) heisse der Winkel dieser zwei Polynome. Es giebt im ganzen $\frac{1}{2} n(n-1)$ solche Winkel (12), (13), ... $((n-1)\,n)$; ich nenne sie die Argumente des Plagioschems S; sein Mass ist eine Funktion von nur diesen $\frac{1}{2} n(n-1)$ unter sich unabhängigen Argumenten. Denn die Zahl aller unter sich unabhängigen Elemente der n Polynome p ist $n(n-1)$, und, wenn man hievon die Zahl $\frac{1}{2} n(n-1)$ der unabhängigen Elemente einer orthogonalen Transformation abzieht, so bleiben nur $\frac{1}{2} n(n-1)$ wesentliche Elemente des Plagioschems übrig; als solche können wir daher jene der Zahl nach übereinstimmenden Argumente annehmen.

Das $(n-m)$fache lineare Kontinuum, das durch $p_1 = o, p_2 = o, \ldots p_{m-1} = o, p_m = o$ bestimmt ist, werde durch $(\overline{1\,2\,3 \ldots m})$ bezeichnet. Man kann die Variabeln immer so orthogonal transformieren, dass für dieses Kontinuum m der neuen Variabeln verschwinden. Man unterdrücke dann diese Variabeln in den Polynomen $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots p_n$, dividiere jedes durch die positive Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der in ihm übrig gebliebenen Koeffizienten und bezeichne sie dann mit

$$p(\overline{1\,2\,3 \ldots m}, m+1),\ p(\overline{1\,2\,3 \ldots m}, m+2), \ldots,\ p(\overline{1\,2\,3 \ldots m}, n)$$

als Grenzpolynome des $(n-m)$sphärischen Perischems $S(\overline{1\,2\,3 \ldots m})$; die Winkel dieser neuen Polynome oder die Argumente des von ihnen begrenzten Perischems mögen z. B. durch $(\overline{1\,2\,3 \ldots m}, (m+1)(m+2))$ dargestellt werden. Ihre Zahl ist $\binom{n-m}{2}$, und da $\binom{n}{m}$ die Zahl aller $(n-m)$sphärischen Perischeme von S ist, so kommen an diesem im im ganzen $\binom{n}{m}\binom{n-m}{2} = \binom{n}{2}\binom{n-2}{m}$ Stücke der erwähnten Ordnung vor ($(n-m)$sphärische Stücke). Gegen das Ende treten Kugeldreiecke, wie $(\overline{4\,5 \ldots n})$, auf; die Argumente eines solchen (trisphärische Stücke) sind seine Winkel $(\overline{4\,5 \ldots n}, 2\,3)$, $(\overline{4\,5 \ldots n}, 1\,3)$, $(\overline{4\,5 \ldots n}, 1\,2)$. Endlich kommen Kreisbogen (disphärische

Stücke oder Seiten), wie $(\overline{3\,4\,5\ldots n})$, von denen jeder selbst sein einziges Argument ist; d. h. es ist $S(\overline{3\,4\,5\ldots n}) = (\overline{3\,4\,5\ldots n}, 1\,2)$; hingegen $S(\overline{4\,5\ldots n}) = (\overline{4\,5\ldots n}, 2\,3) + (\overline{4\,5\ldots n}, 1\,3) + (\overline{4\,5\ldots n}, 1\,2) - \pi$. Da die Zahl der Seiten $\frac{1}{2}\,n\,(n-1)$ ist, so kann man das Plagioschem S auch als Funktion seiner Seiten auffassen. Die Zahl aller seiner Stücke mit Einschluss der Argumente und Seiten ist

$$\sum_{m=0}^{m=n-2} \binom{n}{2}\binom{n-2}{m} = \binom{n}{2} \cdot 2^{n-2}.$$

Ihre Abhängigkeit von den Argumenten ist folgende. Da man die Variabeln immer so orthogonal transformieren kann, dass in den drei Polynomen p_1, p_2, p_3 nur drei Variabeln erscheinen, so kann man die Argumente (23), (13), (12) als Winkel eines Kugeldreiecks auffassen, welches die $(n-1)$sphärischen Stücke $(\overline{1}, 23)$, $(\overline{2}, 13)$, $(\overline{3}, 12)$ zu Seiten hat; diese sind somit durch die bekannten trigonometrischen Relationen in Funktion jener gesetzt. Man kennt also alle $(n-1)$sphärischen Stücke in Funktion der Argumente. Wiederum sind z. B. $(\overline{1}, 34)$, $(\overline{1}, 24)$, $(\overline{1}, 23)$ als Winkel, und $(\overline{12}, 34)$, $(\overline{13}, 24)$, $(\overline{14}, 23)$ als entsprechende Seiten eines Kugeldreiecks anzusehen und dadurch mittelbar alle $(n-2)$sphärischen Stücke in Funktion der Argumente gesetzt. Dies geht so fort, bis endlich die Seiten in Funktion der Argumente gefunden sind. Es ist klar, dass die Supplemente der Argumente dieselben Funktionen der Supplemente der Seiten sein werden, wie die Seiten von den Argumenten sind.

Um diesen Vorstellungen ein analytisches Gewand zu leihen, suchen wir zuerst ein Grenzpolynom eines Perischems so auszudrücken, dass wir keiner Transformation der Variabeln bedürfen. Denkt man sich im Ausdruck eines solchen die anfänglichen Variabeln restituiert, und ist die Ziffer i von $1, 2, \ldots m$ verschieden, so muss man setzen

$$\varrho \cdot p\,(\overline{12\ldots m},\ i) = p_i + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_m p_m; \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

die Faktoren λ sind dann durch die Bedingung bestimmt, dass das neue Polynom zu jedem der m Polynome $p_1, p_2, \ldots p_m$ orthogonal sein muss, also zusammen mit ϱ durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} 1 - \varrho^2 - \lambda_1 \cos\,(i\,1) - \lambda_2 \cos\,(i\,2) - \ldots - \lambda_m \cos\,(i\,m) = 0, \\ -\cos\,(1\,i) \quad + \lambda_1 \quad\quad - \lambda_2 \cos\,(1\,2) - \ldots - \lambda_m \cos\,(1\,m) = 0, \\ -\cos\,(2\,i) - \lambda_1 \cos\,(2\,1) \quad + \lambda_2 \quad\quad - \ldots - \lambda_m \cos\,(2\,m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\cos\,(m\,i) - \lambda_1 \cos\,(m\,1) - \lambda_2 \cos\,(m\,2) - \ldots\ldots + \lambda_m \quad = 0. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (2)$$

Gehen i, ϱ, λ in k, σ, μ über, so ist offenbar die Produktsumme der Koeffizienten der Polynome $p_i + \lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_m p_m$ und $p_k + \mu_1 p_1 + \cdots + \mu_m p_m$ gleich, wie wenn das zweite Polynom bloss durch p_k ersetzt wird, da die Polynome $p_1, p_2, \ldots p_m$ zum ersten orthogonal sein sollen. Man hat demnach

$$\varrho\,\sigma \cos\,(\overline{1\,2\ldots m}, i\,k) = \cos\,(i\,k) + \lambda \cos\,(1\,k) + \lambda_2 \cos\,(2\,k) + \ldots + \lambda_m \cos\,(m\,k).$$

Bringt man in dieser Gleichung alle Glieder auf die linke Seite und setzt sie dann im Systeme (2) an die Stelle der ersten Gleichung, so wird man durch Elimination der Grössen λ den Wert von $\varrho\,\sigma \cos(\overline{1\,2\ldots m}, i\,k)$ bekommen, während der von ϱ^2 sich unmittelbar aus (2) ergiebt, und der von σ^2 aus diesem durch Vertauschung von i und k. Setzt man abkürzend

$$\varDelta\left({i \atop k}\,1\,2\,3\ldots m\right) = \begin{vmatrix} -\cos(i\,k)\cdot & -\cos(i\,1)\cdot & -\cos(i\,2)\cdot & -\cos(i\,3)\cdots & -\cos(i\,m) \\ -\cos(1\,k)\cdot & 1\cdot & -\cos(1\,2)\cdot & -\cos(1\,3)\cdots & -\cos(1\,m) \\ -\cos(2\,k)\cdot & -\cos(2\,1)\cdot & 1\cdot & -\cos(2\,3)\ldots & -\cos(2\,m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\cos(m\,k)\cdot & -\cos(m\,1)\cdot & -\cos(m\,2)\cdot & -\cos(m\,3)\ldots & 1 \end{vmatrix}$$

und hiefür einfach $\varDelta\ (i\,1\,2\,3\ldots m)$, wenn $k = i$ und daher $\cos(i\,k) = -1$ ist, so hat man

$$\varDelta(1\,2\,3\ldots m)\,.\,\varrho\,\sigma\cos(\overline{1\,2\ldots m},\ i\,k) + \varDelta\left({i \atop k}\,1\,2\,3\ldots m\right) = 0,$$

$$\varDelta(i\,1\,2\,3\ldots m) - \varrho^2\varDelta(1\,2\,3\ldots m) = 0, \quad \varDelta(k\,1\,2\,3\ldots m) - \sigma^2\varDelta(1\,2\,3\ldots m) = 0,$$

und hieraus

$$\cos(\overline{1\,2\ldots m}, i\,k) = -\frac{\varDelta\left({i \atop k}\,1\,2\,3\ldots m\right)}{\sqrt{\varDelta(i\,1\,2\,3\ldots m)}\ \sqrt{\varDelta(k\,1\,2\,3\ldots m)}}, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

wo die Quadratwurzeln positiv zu verstehen sind, weil in der Gleichung (1) für $p_1 = o$, $p_2 = o, \ldots p_m = o$ die Polynome p_i und $p\ (\overline{1\,2\ldots m},\ i)$, grösser als Null gesetzt, dieselbe Grenzbedingung ausdrücken sollen, wodurch ϱ (und ebenso σ) notwendig positiv werden. Die drei in diesem Ausdruck vorkommenden Determinanten sind reciproke Elemente der symmetrischen Determinante $\varDelta\ (i\,\mathrm{k}\,1\,2\,3\ldots m)$; und wenn wir diese auf leicht verständliche Weise durch die Ziffern der fehlenden Horizontal- und Vertikalzeile bezeichnen, so bekommen wir

$$\begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix}\cos^2(\overline{1\,2\ldots m}, i\,k) = \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix}\sin^2(\overline{1\,2\ldots m}, i\,k) = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} \end{vmatrix} = \varDelta(i\,k\,1\,1\ldots m)\cdot\begin{bmatrix} i\,k \\ i\,k \end{bmatrix},$$

oder

$$\sin^2(\overline{1\,2\ldots m}, i\,k) = \frac{\varDelta(i\,k\,1\,2\,3\ldots m)\ \varDelta(\ \ 1\,2\,3\ldots m)}{\varDelta(i\ \ 1\,2\,3\ldots m)\ \varDelta(k\,1\,2\,3\ldots m)} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Man kann diese Formel auch durch Betrachtung eines Paralleloschems beweisen, dessen Kanten zu den linearen Kontinuen $(\overline{1})$, $(\overline{2}), \ldots (\overline{m})$, $(\overline{i})$, $(\overline{k})$ normal sind. Der hierzu erforderliche Satz würde heissen:

Das Mass eines $n$fachen Paralleloschems ist gleich dem Produkt zweier begrenzender $(n-1)$facher Paralleloscheme, welche in einem $(n-2)$fachen Paralleloschem sich

schneiden, dividiert durch dieses letzte, und multipliziert mit dem Sinus des von den beiden ersten gebildeten Winkels.

Um ihn zu beweisen, bezeichnen wir die erwähnten vier Paralleloscheme mit P, A, B, C, den Winkel zwischen A und B mit Θ, betrachten A als Basis von P, und C als Basis von B, und setzen h, k als entsprechende Höhen. Denkt man sich nun das Paralleloschem P von einem auf C normalen zweifachen linearen Kontinuum geschnitten, so liegt in diesem ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse k, der Winkel, dessen Scheitel in C fällt, Θ, und die gegenüberliegende Kathete h ist. Es ist also $h = k \sin \Theta$. Aber $P = Ah$, $B = Ck$. Also $CP = AB \sin \Theta$.

Die independenten Formeln (3) und (4) verwandeln sich in bekannte Relationen der sphärischen Trigonometrie, wenn $m = 1$ angenommen wird. Die erste z. B. giebt

$$\cos(\overline{1}, ik) = \frac{\cos(ik) + \cos(1i)\cos(1k)}{\sin(1i)\sin(1k)}.$$

Das orthogonale System der Variabeln kann immer so gewählt werden, dass die Grenzpolynome in folgender Gestalt erscheinen:

$$p_1 = x_1,$$
$$p_2 = -x_1 \cos(12) + x_2 \sin(12),$$
$$p_3 = -x_1 \cos(13) - x_2 \sin(13)\cos(\overline{1},23) + x_3 \sin(13)\sin(\overline{1},23),$$

. . . .

$$p_m = -x_1 \cos(1m) - x_2 \sin(1m)\cos(\overline{1},2m) - x_3 \sin(1m)\sin(\overline{1},2m)\cos(\overline{12},3m) - \cdots$$
$$\cdots - x_{m-1} \sin(1m)\sin(\overline{1},2m)\sin(\overline{12},3m)\ldots\sin(\overline{123\ldots(m-3)},(m-2)m)\cos(\overline{12\ldots(m-2)},(m-1)m)$$
$$+ x_m \sin(1m)\sin(\overline{1},2m)\ldots\sin(\overline{12\ldots(m-3)},(m-2)m)\sin(\overline{12\ldots(m-2)},(m-1)m),$$

. . . .

Bei dieser Darstellung ist die Lösung ($x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = o$, $x_n = 1$) das mit $(\overline{123\ldots(n-1)})$ zu bezeichnende Eck des Plagioschems S; nennen wir dieses Spitze A, so entspricht ihr das Perischem $(\overline{n})$ als Basis. Von A aus gehe ein Strahl normal zum linearen Kontinuum der Basis ($p_n = o$) und treffe dieses in der Lösung B; die Länge des Strahls oder der Abstand AB der Spitze vom linearen Kontinuum $p_n = o$ sei $\sin h$. Vom Centrum O aus gehe ein Radius durch B und treffe die sphärische Basis selbst in C; diese Lösung heisse Fusspunkt; der Kreisbogen, welcher A und C verbindet, ist h und soll Höhe heissen. Endlich sei P irgend eine auf der sphärischen Basis befindliche Lösung, φ ihr sphärischer Abstand von der Spitze A oder der Winkel der Radien OA und OP. Da wir jetzt nur drei Strahlen OA, OC, OP vor Augen haben, so können wir uns durch dieselben ein lineares dreifaches Continuum (Raum) gelegt denken, und die Lösungen A, C, P werden als Ecken eines rechtwinkligen Kugeldreiecks erscheinen, worin $AP = \varphi$ die Hypotenuse ist. Ist der Winkel $APC = \Theta$, so ist $\sin h = \sin \varphi \sin \Theta$. Um P herum liege ein unendlich kleines Element σ der sphärischen

Basis; alle darin enthaltenen Lösungen werden mit der Spitze A durch Kreisbogen verbunden; dadurch entsteht ein partielles sphärisches Kontinuum, welches die einzige endliche Ausdehnung von A bis P hat, während die übrigen unendlich klein sind. Wird nun dieses in P normal durchschnitten, so ist der Querschnitt ein $(n-2)$faches unendlich kleines Kontinuum, dessen Mass $\sigma \sin \Theta$ beträgt.

Da $A\,B = \sin h$ der der Spitze entsprechende Wert des Polynoms p_n, so ist nach (5)

$$\sin h = \sin(1n) \sin(\overline{1},2n) \sin(\overline{12},3n) \ldots \sin(\overline{12\ldots(n-3)},(n-2)n) \sin(\overline{12\ldots(n-2},(n-1)n), \quad (6)$$

wo die Ziffern $1, 2, 3, \ldots n-1$ permutiert werden dürfen; die Werte des Fusspunkts C sind:

$$x_1 = \operatorname{tang} h \cos(1n), \quad x_2 = \operatorname{tang} h \sin(1n) \cos(\overline{1}, 2n), \ldots, \quad x_n = \cos h.$$

§ 21. *Hilfssatz.*

Wird jedes Element des n-sphärischen Plagioschems S mit dem Kosinus seines sphärischen Abstandes von der Spitze multipliziert, so ist die Summe dieser Produkte der $(n-1)$te Teil des Produkts des Masses der Basis und des Sinus der Höhe.

Beweis. Es seien

$$x_1 = \sin\varphi \,.\, x'_1, \quad x_2 = \sin\varphi \,.\, x'_2, \ldots, \quad x_{n-1} = \sin\varphi \,.\, x'_{n-1}, \quad x_n = \cos\varphi,$$

so wird das Element des sphärischen Kontinuums

$$\sin^{n-2}\varphi \, d\varphi \,.\, \omega,$$

wo ω das äquatoriale Element bezeichnet, welches man auch durch

$$\frac{d x'_2 \, d x'_3 \ldots d x'_{n-1}}{x'_1} \text{ für } x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 + \cdots + x'^2_{n-1} = 1$$

ausdrücken kann. Wenn wir nun das Integral

$$\int^{n-1} \cos\varphi \,.\, \sin^{n-2}\varphi \, d\varphi \,.\, \omega$$

bestimmen wollen, so setzen wir zuerst $x'_1, x'_2, \ldots x'_{n-1}$ als konstant voraus und integrieren von $\varphi = o$ bis zu dem durch die Basis $p_n = o$ bestimmten Werte von φ, für den wir diesen Buchstaben behalten wollen. Wir bekommen

$$\frac{1}{n-1} \int^{n-2} \sin^{n-1}\varphi \,.\, \omega,$$

oder, da, wie wir oben gesehen haben, für eine auf der Basis befindliche Lösung P der normale Querschnitt

$$\sin^{n-2}\varphi \,.\, \omega = \sin\Theta \,.\, \sigma = \sin h \cdot \frac{\sigma}{\sin\varphi}$$

ist, zuletzt

$$\int^{n-1} \cos\varphi \,.\, \sin^{n-2}\varphi \, d\varphi \,.\, \omega = \frac{\sin h}{n-1} \int^{n-2} \sigma,$$

d. h. gleich dem $(n-1)$ten Teile des Sinus der Höhe, multipliziert mit der Basis.

§ 22. *Mass eines sphärischen Plagioschems.*

Satz. Die in Beziehung auf die Argumente genommenen Differentialkoeffizienten des Masses eines n-sphärischen Plagioschems sind gleich den Massen der mit den Argumenten gleichnamigen $(n-2)$-sphärischen Perischeme, dividiert durch $n-2$:

$$dS = \frac{1}{n-2}\left\{S(1\,2)\,d(12) + S(1\,3)\,d(13) + \cdots + S(\overline{(n-1\;n)})\,d((n-1)n)\right\}.$$

Beweis. Um das einzige Argument (12) zu variieren, variieren wir nur das Polynom p_1, die Darstellung (5) in § 20 voraussetzend. Dasselbe verwandle sich in

$$(1+k_1)\,x_1 + k_2\,x_2 + k_3\,x_3 + \cdots + k_n\,x_n,$$

wo $k_1, k_2, \ldots k_n$ unendlich kleine Grössen bezeichnen. Da die Summe der Quadrate der Koeffizienten gleich 1 bleiben und die Argumente (1 3), (1 4), ... (1 n) konstant sein sollen, so hat man $n-1$ Bedingungsgleichungen, welche gerade hinreichen, um die $n-1$ Verhältnisse $k_1 : k_2 : \ldots : k_n$ zu bestimmen. Die erste Gleichung

$$(1+k_1)^2 + k_2^2 + k_3^2 + \cdots + k_n^2 = 1$$

reduziert sich, da es nur auf unendlich kleine Grössen erster Ordnung ankommt, auf $2\,k_1 = o$. Dann sind aber sämtliche Bedingungsgleichungen gerade so beschaffen, wie wenn die Werte der Variabeln für das Eck $(\overline{1\,3\,4\,5\ldots n})$ zu bestimmen sind. Versetzen wir uns aber in das $(n-1)$-sphärische Kontinuum $(\overline{1})$ hinein, indem wir die durch x_1 bezeichnete Dimension aufheben, und fassen $(\overline{1\,2})$ als Basis des Perischems $S(1)$, folglich jenes Eck als dessen Spitze auf, so tritt der für diese geltende Wert von x_2 als Sinus der Höhe, sin h, auf. Da man ferner für den Winkel zwischen dem variierten Polynome $p_1 = x_1 + k_2\,x_2 + k_3\,x_3 + \cdots + k_n\,x_n$ und dem unveränderten Polynom

$$p_2 = -x_1 \cos(1\,2) + x_2 \sin(1\,2) \text{ die Gleichung}$$

$$-\cos((1\,2) + d(1\,2)) = -\cos(1\,2) + k_2 \sin(1\,2)$$

hat, so muss $k_2 = d(1\,2)$ sein. Folglich verhalten sich $k_2, k_3, \ldots k_n$ zu den gleichnamigen der Spitze $(\overline{1\,3\,4\,5\ldots n})$ zukommenden Werten der Variabeln, wie $d(1\,2) : \sin h$. Ist nun φ der sphärische Abstand der Spitze von irgend einer im Perischem $S(\overline{1})$ enthaltenen Lösung $(0, x_2\, x_3, \ldots x_n)$, so ist demnach

$$k_2\,x_2 + k_3\,x_3 + \cdots + k_n\,x_n = \frac{\cos\varphi}{\sin h}\,d(1\,2),$$

und das partielle n-sphärische Kontinuum dS bekommt ausser den Grenzen von $S(\overline{1})$ noch die unendlich nahen Grenzen: ursprüngliches $p_1 < o$, und variiertes $p_1 > o$, oder

$$x_1 + \frac{\cos\varphi}{\sin h}\,d(1\,2) > o > x_1,$$

oder
$$o < -x_1 > \frac{\cos\varphi}{\sin h}\, d\,(1\,2).$$

Weil somit x_1 unendlich klein ist, so sind im Ausdruck für dS die auf $x_2, x_3, \ldots x_n$ bezüglichen Integrationsgrenzen so zu nehmen, wie wenn $x_1 = o$ wäre, also dieselben wie für das Perischem $S(\overline{1})$. Integriert man nun die Formel für dS in Beziehung auf x_1, so ergiebt sich dS gleich der Summe sämtlicher Elemente von $S(\overline{1})$, jedes multipliziert mit $\frac{\cos\varphi}{\sin h}\, d\,(1\,2)$; und da φ der sphärische Abstand dieses Elements von der Spitze $(\overline{1\,3\,4\,5\ldots n})$, so ist nach dem vorigen Hilfssatz:

$$dS = \frac{d\,(1\,2)}{\sin h} \times \frac{1}{n-2} \text{Basis } S(\overline{1\,2}) \,.\, \sin h = \frac{1}{n-2} S(\overline{1\,2}) \,.\, d\,(1\,2)\,.$$

B e m e r k u n g. Diese Form des Satzes hat das Unbequeme, dass man ihn nicht bis auf $n = 2$ hinunter verfolgen kann. Dies wird jedoch durch eine leichte Umgestaltung möglich gemacht.

Es sei
$$P = \int^{n} dx_1\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_n \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < 1 \\ p_1 > o,\ p_2 > o, \ldots p_n > o \end{pmatrix}$$

ein von n durchs Centrum gehenden linearen Kontinuen begrenztes Stück der n-Sphäre, das wir allenfalls n-s p h ä r i s c h e P y r a m i d e nennen können, so ist offenbar

$$P = S \int_0^1 r^{n-1}\, dr, \text{ oder } P = \frac{1}{n}\, S.$$

Bezeichnet dann z. B. $P(\overline{1\,2})$ die im $(n-2)$fachen linearen Kontinuum $(p_1 = o,\ p_2 = o)$ befindliche $(n-2)$-sphärische Pyramide, so ist ebenso

$$P(\overline{1\,2}) = \frac{1}{n-2}\, S\,(\overline{1\,2}).$$

Wenn man also im gegenwärtigen Satze sphärische Pyramiden statt der sphärischen Plagioscheme einführt, so erhält man

$$dP = \frac{1}{n}\left\{P(\overline{1\,2})\, d\,(1\,2) + P\,(\overline{1\,3})\, d\,(1\,3) + \cdots + P\,(\overline{(n-1)\,n})\, d\,((n-1)\,n)\right\}.$$

Setzen wir jetzt $n = 2$, so wird die disphärische Pyramide zum K r e i s a u s s c h n i t t, und in der Formel $dP = \frac{1}{2} P(\overline{1\,2})\, d\,(1\,2)$ bezeichnet $(1\,2)$ den Mittelpunktwinkel und $P(\overline{1\,2})$ das Mass des nullfachen Kontinuums, welches die begrenzenden Radien $(p_1 = o,$ $p_2 = o)$ innerhalb des Kreises gemein haben, d. h. das Mass des Centrums. Nun sind

leicht Gründe aufzufinden, die uns berechtigen, 1 als Mass einer nullfachen Totalität anzunehmen. Wir bekommen also $dP = \frac{1}{2}\,d\,(1\,2)$, und durch Integration $P = \frac{1}{2}(1\,2)$, als Inhalt eines Kreisausschnitts vom Radius 1.

Setzen wir $n = 3$, so wird die trisphärische Pyramide zur Kugelpyramide; in der Formel

$$d\,P = \frac{1}{3}\left\{P(\overline{1\,2})\,d\,(1\,2) + P\,(\overline{1\,3})\,d\,(1\,3) + P\,(\overline{2\,3})\,d\,(2\,3)\right\}$$

sind (1 2), (1 3), (2 3) die Flächenwinkel der Pyramide oder die Winkel des Kugeldreiecks S; $P\,(\overline{1\,2})$ ist das Mass des einfachen Kontinuums ($p_1 = o$, $p_2 = o$), welches durch die Bedingungen $p_3 > o$ und $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1$ begrenzt wird, d. h. das Mass des vom Centrum nach dem Eck $(\overline{1\,2})$ gehenden Radius, also gleich 1. Bezeichnen wir die drei Argumente mit α, β, γ, so ist demnach $d\,P = \frac{1}{3}\,(d\alpha + d\beta + d\gamma)$. Um die Integrationskonstante bestimmen zu können, lassen wir P verschwinden, was dadurch geschieht, dass wir $p_1 = p_2 = -p_3$ annehmen; dann wird aber $(1\,2) = \pi$, $(1\,3) = (2\,3) = o$. Wir haben also

$$P = \frac{1}{3}\,(\alpha + \beta + \gamma - \pi), \quad \text{oder:} \quad S = \alpha + \beta + \gamma - \pi,$$

wenn S das Mass des Kugeldreiecks bezeichnet.

Von jetzt an halten wir uns wieder an die erste Form des Satzes. Für $n = 4$ oder für das tetrasphärische Plagioschem S ist das disphärische Perischem $S\,(\overline{1\,2})$ ein Kreisbogen, dessen Mass mit seinem Argument $(\overline{1\,2}, 3\,4)$ ein und dasselbe ist. Also ist

$$d\,S = \frac{1}{2}\Big\{(\overline{1\,2}, 3\,4)\,d\,(1\,2) + (\overline{1\,3}, 2\,4)\,d\,(1\,3) + (\overline{1\,4}, 2\,3)\,d\,(1\,4) + (\overline{2\,3}, 1\,4)\,d\,(2\,3)$$
$$+ (\overline{2\,4}, 1\,3)\,d\,(2\,4) + (\overline{3\,4}, 1\,2)\,d\,(3\,4)\Big\},$$

oder: das Mass des tetrasphärischen Plagioschems hat seine halben Seiten zu Differentialkoeffizienten. Sind diese Seiten unendlich klein, so verwandelt sich S in eine dreiseitige Pyramide des Raums; man kann nun wirklich nachweisen, dass das Integral des vorliegenden Ausdrucks sich alsdann auf die bekannte Formel für den Inhalt einer räumlichen Pyramide reduziert.

Für das pentasphärische Plagioschem S wird das trisphärische Perischem $S\,(\overline{1\,2})$ zum Kugeldreieck, dessen Mass gleich der Summe seiner Winkel weniger π ist. Die Funktion S hat 10 Argumente, und von den bezüglichen Differentialkoeffizienten ist z. B.

$$\frac{\partial S}{\partial (1\,2)} = \frac{1}{3}\left\{(\overline{1\,2}, 3\,4) + (\overline{1\,2}, 3\,5) + (\overline{1\,2}, 4\,5) - \pi\right\},$$

und, wenn man die 30 Glieder wie $(\overline{12}, 34)\, d(12)$ nach den Kombinationen (1234) vierter Klasse ordnet:

$$
\begin{aligned}
3\, d\, S = & \Big\{ (\overline{12}, 34)\, d(12) + (\overline{13}, 24)\, d(13) + (\overline{14}, 23)\, d(14) \\
& + (\overline{23}, 14)\, d(23) + (\overline{24}, 13)\, d(24) + (\overline{34}, 12)\, d(34) \Big\} + \text{etc.} \\
& - \pi\, d \Big\{ (12) + (13) + \cdots + (45) \Big\} \\
= & \; 2\, d \Big\{ S(1234) + S(1235) + S(1245) + S(1345) + S(2345) \Big\} \\
& - \pi\, d \Big\{ (12) + (13) + \cdots (45) \Big\},
\end{aligned}
$$

wo $S(1234)$ z. B. ein tetrasphärisches Plagioschem bezeichnet, dessen Argumente (12), (13), (14), (23), (24), (34) sind. Um die Integrationskonstante zu bestimmen, nehmen wir an, alle Argumente des pentasphärischen Plagioschems seien rechte. Dann wird

$$S(12345) = \frac{1}{2^5} \frac{8\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{12}, \quad S(1234) = \frac{2\pi^2}{2^4} = \frac{\pi^2}{8},$$

und wir bekommen

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{5\pi^2}{4} - \pi \,.\, 10 \,.\, \frac{\pi}{2} + \text{Const., also Const.} = 4\pi^2,$$

und endlich

$$
\begin{aligned}
S(12345) = & \frac{2}{3} \Big\{ S(2345) + S(1345) + S(1245) + S(1235) + S(1234) \Big\} \\
& - \frac{\pi}{3} \Big\{ (12) + (13) + (14) + (15) + (23) + (24) + (25) + (34) + (35) + (45) \Big\} + \frac{4\pi^2}{3}.
\end{aligned}
$$

Wir sehen hieraus, dass, wie das Mass des Kugeldreiecks auf Kreisbogen zurückkommt, so dasjenige des pentasphärischen Plagioschems auf tetrasphärische Plagioscheme und Kreisbogen. Wollten wir diese Wahrnehmung weiter verfolgen, so würden Gammafunktionen und Potenzen von π den an sich einfachen Satz „über die Reduktion perissosphärischer Plagioscheme auf artiosphärische“ *) ohne Not verwickeln. Wir ziehen es daher vor, zuerst statt der allgemeinen Masseinheit eine besondere für sphärische Plagioscheme passende Einheit einzuführen, von ähnlicher Bedeutung wie die des Quadranten für Kreisbogen.

§ 23. *Plagioschematische Funktionen; reduzierbare Fälle von Orthogonalität*

Wir setzen fortan

$$\int^n_{\substack{x^2 + y^2 + \cdots < 1 \\ p_1 > o, \ldots p_n > o}} dx\, dy\, dz \ldots = f(123 \ldots n) \times \int^n_{\substack{x^2 + y^2 + \cdots < 1 \\ x > o,\, y > o, \ldots}} dx\, dy\, dz \ldots ,$$

*) [Die Ausdrücke „perissosphärisch“ und „artiosphärisch“ werden S. 70 erklärt.]

oder, was dasselbe ist

$$P(1\,2\,3\ldots n)=\frac{1}{2^n}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}f(1\,2\,3\ldots n),\quad S(1\,2\,3\ldots n)=\frac{1}{2^{n-1}}\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}f(1\,2\,3\ldots n),$$

und nennen $f(1\,2\,3\ldots n)$ eine n-sphärische plagioschematische Funktion, $p_1, p_2, \ldots p_n$ ihre Grenzpolynome, und die von diesen gebildeten Winkel $(12), \ldots$ ihre Argumente. Jede solche Funktion bekommt die Einheit als Wert, wenn alle Argumente $\frac{\pi}{2}$ sind. Es ist dann z. B.

$$f(12)=\frac{2}{\pi}(12),\quad f(123)=f(12)+f(13)+f(23)-2,$$

$$f(1\,2\,3\,4\,5)=f(2\,3\,4\,5)+\text{etc.}-2\left\{f(12)+\text{etc.}\right\}+16.$$

Da $\frac{2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}}}:\frac{2^{n-3}\Gamma(\frac{n-2}{2})}{\pi^{\frac{n-2}{2}}}=(n-2)\cdot\frac{2}{\pi}$ ist, so wird die allgemeine Differentialgleichung des vorigen §:

$$df(1\,2\,3\ldots n)=f(\overline{12}, 3\,4\ldots n)\,df(12)+f(\overline{13}, 2\,4\,5\ldots n)\,df(13)+\text{etc.}$$

Nehmen wir jetzt an, jedes der m ersten Polynome $p_1, p_2, \ldots p_m$ sei zu jedem der übrigen $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots p_n$ orthogonal. Man wird überhaupt die Variabeln so wählen können, dass in jenen nur die m Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_m$ erscheinen. Kämen nun diese auch in einem der folgenden Polynome vor, so würde aus den entsprechenden m Orthogonalitätsbedingungen das Verschwinden der Determinante der Koeffizienten jener m ersten Polynome folgen, was wir nicht zugeben dürfen, da diese unter sich unabhängig sein sollen. Also können die $n-m$ letzten Polynome nur die übrigen Variabeln $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots x_n$ enthalten. Es sei nun

$$\cos^2\Theta=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2,\ x_{m+1}=\sin\Theta\,.\,y_1,\ x_{m+2}=\sin\Theta\,.\,y_2,\ldots,\ x_n=\sin\Theta\,.\,y_{n-m},$$

und man denke sich die m ersten Variabeln, also auch Θ, zuerst als konstant, und die Integration nur in Beziehung auf die $n-m$ letzten Variabeln vollzogen, so werden die auf diese bezüglichen linearen Integrationsgrenzen durch die Einführung der Variabeln y nicht geändert, und es kommt noch die Grenze $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{n-m}^2<1$ hinzu. Da das Produkt $d\,x_{m+1}\,d\,x_{m+2}\ldots d\,x_n$ sich in

$$\sin^{n-m}\Theta\,.\,d\,y_1\,d\,y_2\ldots d\,y_{n-m}$$

verwandelt, so hat man:

$$P(1\,2\,3\ldots n)=f\big((m+1)(m+2)\ldots n\big)\times\int^n \sin^{n-m}\Theta\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{n-m}$$
$$(p_1>o, p_2>o,\ldots p_m>o, y_1>o, y_2>o,\ldots y_{n-m}>o)$$

$$=f\big((m+1)(m+2)\ldots n\big)\times\int^n dx_1\,dx_2\ldots dx_m\,dx_{m+1}\,dx_{m+2}\ldots dx_n\quad;$$
$$(p_1>o,\ldots p_m>o, x_{m+1}>o,\ldots x_n>o)$$

Denkt man sich hier die $n-m$ letzten Variabeln $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots x_n$ zuerst als konstant, und die Integration nur in Beziehung auf die m ersten Variabeln vollzogen, so erhält man auf demselben Wege wie vorhin:

$$P(1\,2\,3\dots n) = f\big((m+1)(m+2)\dots n\big) \times f(1\,2\,3\dots m) \times \int\limits_{\substack{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1 \\ x_1>o,\,x_2>o,\dots x_n>o}}^{n} dx_1\,dx_2\dots dx_n \quad ;$$

also endlich:

$$f(1\;2\;3\dots n) = f(1\;2\;3\dots m)\,f\big((m+1)(m+2)\dots n\big);$$

d. h., sind m Grenzpolynome einer n-sphärischen Funktion sämtlich zu den $n-m$ übrigen orthogonal, so ist dieselbe das Produkt der von jenen begrenzten m-sphärischen Funktion und der von diesen begrenzten $(n-m)$-sphärischen. Hierbei ist zu bemerken, dass $f(1) = 1$, weil auch für die Grenzen $x^2 < 1$, $x > o$, $\int dx = 1$ ist. Wenn also das erste Grenzpolynom zu allen übrigen orthogonal ist, so hat man $f(1\,2\,3\dots n) = f(2\,3\,4\dots n)$; und wenn überhaupt die m ersten Polynome nicht nur zu allen übrigen, sondern auch alle unter sich orthogonal sind, so hat man $f(1\,2\,3\dots n) = f\big((m+1)(m+2)\dots n\big)$.

Wenn zwei plagioschematische Funktionen sich bloss dadurch unterscheiden, dass ein bei der ersten positiv genommenes Grenzpolynom bei der andern negativ genommen wird, so ist die Summe dieser Funktionen doppelt so gross als die nur von allen übrigen Polynomen begrenzte Funktion; oder

$$f(p_1, p_2, p_3, \dots p_n) + f(-p_1, p_2, p_3, \dots p_n) = 2f(p_2, p_3, \dots p_n).$$

Wenn man sich nämlich die zwei ersten Funktionen durch die entsprechenden Integrale ersetzt denkt, so ist deren Summe ein ähnliches Integral, worin die Grenzbedingung $p_1 > o$ oder $-p_1 > o$ wegfällt; diese Summe bleibt sich daher gleich, wenn auch das Polynom p_1 sich ändert, z. B. zu allen übrigen Polynomen orthogonal wird; dann hat aber jede der Funktionen, aus denen die Summe besteht, den Wert $f(2\;3\;4\dots n)$; folglich ist diese $2f(2\;3\;4\dots n)$.

§ 24. *Reduktion der perissosphärischen Plagioscheme auf artiosphärische.*

Um die zwei Fälle einer geraden und einer ungeraden Dimensionszahl zu unterscheiden, gebrauchen wir die Ausdrücke Artiosphäre und Perissosphäre. Wir haben schon gesehen, dass die trisphärischen und pentasphärischen Plagioscheme sich linear durch artiosphärische Plagioscheme niedrigerer Ordnung ausdrücken lassen, und stellen nun folgenden allgemeinen Satz hin:

Wenn f_{2n+1} eine von den Polynomen $p_1, p_2, \dots p_{2n+1}$ begrenzte plagioschematische Funktion ist, und man mit Σf_{2m} die Summe aller $2m$-sphärischen

Funktionen bezeichnet, welche von irgend $2m$ jener Polynome begrenzt werden ($f_o = 1$ angenommen), so ist

$$f_{2n+1} = \sum_{i=o}^{i=n} (-1)^i a_i \, \Sigma f_{2n-2i}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1)$$

wo die Koeffizienten a durch die Gleichung

$$\operatorname{tang} x = \sum_{i=o}^{i=\infty} a_i \frac{x^{2i+1}}{1.2.3\ldots(2i+1)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$$

definiert sind.

Beweis. Differentiiert man die Gleichung (1) nach irgend einem Argument von f_{2n+1}, z. B. nach $(1\,2)$, so fällt rechts das letzte Glied $(-1)^n a_n$ weg, und man erhält

$$f_{2n-1}(\overline{1\,2}) = \sum_{i=o}^{i=n-1} (-1)^i a_i \, \Sigma f_{2n-2i-2}(\overline{1\,2}),$$

eine ähnliche Gleichung, worin nur die Dimensionszahl $2n+1$ durch $2n-1$, und die Grenzpolynome durch $p(\overline{1}\,2, 3)$, $p(\overline{1}\,2, 4)$, $\ldots p(\overline{1}\,2, n)$ ersetzt sind. Wäre nun der Satz für die $(2n-1)$-Sphäre schon zugegeben, so könnte man durch Integration von dieser Gleichung auf (1) zurückschliessen, und brauchte nur noch nachzuweisen, dass die Integrationskonstante $(-1)^n a_n$ richtig bestimmt ist. In der That, wenn wir annehmen, dass alle Argumente von f_{2n+1} rechte seien, und edenken, dass die Summe Σf_{2n-2i} so viele Glieder zählt, als $2n+1$ Elemente zu je $2n-2i$ kombiniert werden können, so wird die Gleichung (1)

$$1 = \sum_{i=o}^{i=n} (-1)^i a_i \binom{2n+1}{2i+1},$$

oder, wenn man mit $1.2.3\ldots(2n+1)$ dividiert,

$$\sum_{i=o}^{i=n} \frac{(-1)^{n-i}}{1.2.3\ldots(2n-2i)} \cdot \frac{a_i}{1.2.3\ldots(2i+1)} = \frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots(2n+1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (3)$$

Dieselbe Rekursionsgleichung (3) findet man aber auch, wenn man die Gleichung (2) mit

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \cdots$$

multipliziert, und in der Entwickelung die Koeffizienten von x^{2n+1} auf beiden Seiten einander gleich setzt. Die Integrationskonstante wäre also richtig bestimmt, wenn der Satz für die Dimensionszahl $2n-1$ wahr wäre. Da aber für die Trisphäre wirklich $f_3 = \Sigma f_2 - 2$, und $a_o = 1$, $a_1 = 2$ ist, so ist der Satz allgemein bewiesen.

Wir wollen die Gleichung (1) noch einer andern Probe unterwerfen, indem wir annehmen, ein Grenzpolynom von f_{2n+1} sei zu allen übrigen orthogonal; jenes mag

äquatorial, diese meridian heissen. Scheiden wir nun alle Funktionen f_{2m} in zwei Gruppen, je nachdem das äquatoriale Polynom in der entsprechenden Kombination vorkommt oder nicht, und versehen im ersten Falle den Funktionsbuchstaben mit dem Zeichen des senkrechten $\perp$, und bei der ungeschiedenen Summe das Symbol Σ mit demselben Beisatz, um anzuzeigen, dass das äquatoriale Polynom sich unter den Elementen befinde, über deren Kombinationen die Summe sich erstreckt, so haben wir

$$\overset{\perp}{f}_{2n+1} = f_{2n},\quad \overset{\perp}{\Sigma} f_{2m} = \Sigma f_{2m} + \Sigma \overset{\perp}{f}_{2m} = \Sigma f_{2m} + \Sigma f_{2m+1},$$

wo auf der rechten Seite der letzten Gleichung die erste Summe $\binom{2n}{2m}$, die zweite $\binom{2n}{2m-1}$ Glieder zählt. Nach (1) ist

$$f_{2m-1} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} (-1)^{\lambda-1} a_{\lambda-1} \Sigma f_{2m-2\lambda}.$$

Will man nun dieses in der vorigen Gleichung substituieren, so frägt es sich, wie oft eine und dieselbe Kombination von $2m - 2\lambda$ meridianen Polynomen, oder vielmehr die entsprechende $f_{2m-2\lambda}$ im entwickelten Ausdruck für Σf_{2m-1} sich wiederhole. Da $2m - 2\lambda$ meridiane Polynome schon gesetzt sind, so bleiben deren noch $2n - 2m + 2\lambda$ übrig, und daraus können $2\lambda - 1$ gewählt und mit jenen zu einer Kombination vereinigt werden, welche einer gewissen Funktion f_{2m-1} entspricht. Dies kann aber auf $\binom{2n-2m+2\lambda}{2\lambda-1}$ Arten geschehen, und eben so oft wird also jede einzelne Funktion $f_{2m-2\lambda}$ wiederholt. Demnach ist

$$\overset{\perp}{\Sigma} f_{2m} = \Sigma f_{2m} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} (-1)^{\lambda-1} \binom{2n-2m+2\lambda}{2\lambda-1} a_{\lambda-1} \Sigma f_{2m-2\lambda}.$$

Setzen wir nun, indem wir diese Formel in der Gleichung (1) substituieren, $m = n - i$ und $\lambda = k - i$, so bekommen wir

$$f_{2n} = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i a_i \Sigma . f_{2n-i} + \sum_{i=0}^{i=n-1} \sum_{k=i+1}^{k=n} (-1)^{k-1} \binom{2k}{2i+1} a_i a_{k-i-1} \Sigma f_{2n-2k}.$$

Kehrt man in der Doppelsumme rechts die Ordnung der Summationen um, so durchläuft, wenn man k als konstant voraussetzt, i die Werte $0, 1, 2, \ldots k - 1$; und dann ist nach und nach $k = 1, 2, \ldots n$ zu setzen. Man bekommt daher

$$0 = \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^k \left\{ a_k - \sum_{i=0}^{i=k-1} \binom{2k}{2i+1} a_i a_{k-i-1} \right\} \Sigma f_{2n-2k}.$$

Zur identischen Giltigkeit dieser Gleichung wird erfordert, dass überhaupt

$$a_n = \sum_{i=0}^{i=n-1} \binom{2n}{2i+1} a_i \, a_{n-i-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

sei. Dividiert man diese Gleichung durch $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots 2n$, so sieht man leicht, dass sie aus der Gleichung des Koeffizienten von $x^{2n}\, dx$ in der Entwicklung von $d \operatorname{tang} x = dx + \operatorname{tang}^2 x \,.\, dx$ hervorgeht.

Setzt man $a_n = 2^n c_n$, so erhält die Rekursionsgleichung (4), indem man die Fälle von geradem und ungeradem n unterscheidet, die Formen

$$c_{2n} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \binom{4n}{2i+1} c_i \, c_{2n-i-1}, \quad c_{2n+1} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \binom{4n+2}{2i+1} c_i \, c_{2n-i} + \frac{1}{2} \binom{4n+2}{2n+1} c_n^2.$$

Man braucht also nur zu zeigen, dass $\binom{4n+2}{2n+1}$ immer durch 2 teilbar sei, um daraus schliessen zu dürfen, dass alle c ganze und positive Zahlen seien. Dieses ist nun wirklich in folgendem allgemeinen Satze enthalten.

Wenn p eine Primzahl, n, i, k überhaupt ganze positive Zahlen sind, $o < k < p$, so ist $\binom{np}{ip+k}$ durch p teilbar. Denn es ist

$$\binom{np}{ip} . p . (n-i)(np-ip-1)(np-ip-2)\ldots(np-ip-k+1) \quad \binom{np}{ip+k} . (ip+1)(ip+2)\ldots(ip+k);$$

da die linke Seite den Faktor p hat, und rechts die k letzten Faktoren durch p nicht teilbar sind, so muss der erste Faktor $\binom{np}{ip+k}$ es sein.

Man findet $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, $c_3 = 2 \,.\, 17$, $c_4 = 16 \,.\, 31$, $c_5 = 16 \,.\, 691$, $c_6 = 64 \,.\, 43 \,.\, 127$, $c_7 = 16 \,.\, 257 \,.\, 3617, \ldots$

Sind die Bernoullischen Zahlen B_n durch die Gleichung

$$\frac{x}{2} \operatorname{cotg} \frac{x}{2} = 1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \frac{x^{2n}}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots 2n}$$

definiert, so folgt

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{cotg} x - 2 \operatorname{cotg} 2x = \sum_{n=0}^{n=\infty} 2^{2n+2} \frac{2^{2n+2}-1}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (2n+2)} B_{1+n} \, x^{2n+1},$$

also

$$c_n = 2^{n+1} \frac{2^{2n+2}-1}{n+1} B_{n+1}.$$

Endlich möge noch eine leichte Probe der Gleichung (1) erwähnt werden. Wird das von $n+1$ linearen Kontinuen umschlossene reguläre Polyschem der n-fachen Totalität auf die konzentrische Sphäre projiziert, so zerfällt ihr Umschluss in $n+1$ reguläre Plagioscheme, und die Argumente eines solchen sind sämtlich gleich $\frac{2\pi}{3}$. Wenn

also alle Grenzpolynome der Funktion f_n miteinander Argumente $\frac{2\pi}{3}$ bilden, so ist $f_n = \frac{2n}{n+1}$. Setzt man diese Werte in die Gleichung (1), so erhält man

$$\frac{2^{2n+1}}{2n+2} = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \binom{2n+1}{2n-2i} \frac{2^{2n-2i}}{2n-2i+1} a_i .$$

Multipliziert man diese Formel mit $\frac{(-1)^n}{1.2.3\ldots(2n+1)}$, so fällt sie zusammen mit derjenigen, welche man durch die Gleichsetzung des Koeffizienten von x^{2n+2} in der Entwicklung der Gleichung $1 - \cos 2x = \sin 2x \times \operatorname{tang} x$ erhält.

§ 25. *Zerlegung der sphärischen Plagioscheme in Orthoscheme.*

Sind die Grenzpolynome $p_1, p_2, \ldots p_n$ eines Plagioschems S so beschaffen, dass nur die $n-1$ Argumente (12), (23), (34), (45), ... $((n-1)n)$ frei bleiben, alle $\binom{n-1}{2}$ übrigen aber rechte sind, so nennen wir S ein Orthoschem und betrachten sein Mass als Funktion der $n-1$ freien Argumente, bei denen die obige Ordnung wesentlich ist, aber auch umgekehrt werden darf, ohne dass die Funktion sich ändert. Es soll nun gezeigt werden, dass jedes n-sphärische Plagioschem in $1.2.3\ldots(n-1)$ Orthoscheme zerlegt werden kann, deren Argumente durch trigonometrische Relationen aus denen des Plagioschems herzuleiten sind.

Wir wollen zuerst sehen, wie die orthogonalen Variabeln gewählt werden müssen, damit die Grenzpolynome eines Orthoschems in der einfachsten Gestalt erscheinen. Ich setze voraus, man habe die in § 20 gegebene Darstellung (5) der Grenzpolynome vor Augen, wo das erste nur eine Variable und jedes folgende immer eine neue Variable mehr als das vorhergehende enthält. Weil nun $(13) = (14) = \cdots = (1n) = \frac{\pi}{2}$ sein soll, so muss x_1 in den Polynomen $p_3, p_4, \ldots p_n$ fehlen. Da p_2 nur x_1 und x_2 enthält, so folgt ferner aus $(24) = (25) = \cdots = (2n) = \frac{\pi}{2}$, dass in den Polynomen $p_4, p_5, \ldots p_n$ die Variable x_2 fehlen muss. Also ist nicht nur $(13) = (14) = \cdots = (1n) = \frac{\pi}{2}$, sondern auch $(\bar{1}, 24) = (\bar{1}, 25) = \cdots = (\bar{1}, 2n) = \frac{\pi}{2}$. Wird diese Schlussweise fortgesetzt, so sieht man, dass das Polynom p_m nur die Variabeln x_{m-1} und x_m enthält, und dass

$$(\overline{123\ldots m}, (m+1)(m+3)) = (\overline{123\ldots m}, (m+1)(m+4)) = \cdots = (\overline{123\ldots m}, (m+1)n) = \frac{\pi}{2}$$

ist; die Grenzpolynome erhalten folgende Form:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \quad x_1,\\
p_2 &= -x_1\cos(12)+x_2\sin(12),\\
p_3 &= \qquad\qquad -x_2\cos(\overline{1},\,23)+x_3\sin(\overline{1},\,23),\\
p_4 &= \qquad\qquad\qquad\qquad -x_3\cos(\overline{12},\,34)+x_4\sin(\overline{12},\,34),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
p_n &= -x_{n-1}\cos(\overline{123\dots(n-2)},(n-1)n)+x_n\sin(\overline{123\dots(n-2)},(n-1)n).
\end{aligned}
$$

Werden die allgemeinen Formeln (1) bis (4) des § 20 auf die Grenzpolynome und Argumente des Perischems $S(\overline{m})$ angewandt, so erhält man

$$p(\overline{m},\, m-1)=\frac{p_{m-1}+p_m\cos((m-1)m)}{\sin((m-1)m)},\quad p(\overline{m},\, m+1)=\frac{p_{m+1}+p_m\cos(m(m+1))}{\sin(m(m+1))},$$

und für jedes von $m-1,\ m,\ m+1$ verschiedene i, $p(\overline{m},\, i)=p_i$,

$$\cos(\overline{m},\,(m-2)(m-1))=\frac{\cos((m-2)(m-1))}{\sin((m-1)m)},\ \cos(\overline{m},\,(m+1)(m+2))=\frac{\cos((m+1)(m+2))}{\sin(m(m+1))},$$

$$\cos(\overline{m},\,(m-1)(m+1))=-\operatorname{cotg}((m-1)m)\operatorname{cotg}(m(m+1)),$$

sonst $(\overline{m},\, i(i+1))=(i(i+1))$ für $i=1, 2, 3, \dots m-3;\ m+2,\ m+3, \dots n-1$; ausser diesen $n-2$ Argumenten von $S(\overline{m})$ sind alle übrigen rechte; also ist $S(\overline{m}, 123\dots(m-1)\, m+2)(m+3)\dots n)$ ein $(n-1)$-sphärisches Orthoschem. Der Beweis gilt für alle $(n-1)$-sphärischen Perischeme und kann an jedem von diesen in Beziehung auf seine $(n-2)$-sphärischen Perischeme wiederholt werden, und so fort. Folglich sind alle Perischeme von jeder beliebigen Ordnung Orthoscheme, und bei jedem die Ziffern seiner Grenzpolynome in derselben Ordnung zu nehmen, wie sie im Ausdruck des ursprünglichen Orthoschems auf einander folgen.

Denken wir uns nun das soeben betrachtete Orthoschem $S(123\dots n)$ auf eine $(n+1)$-sphäre gesetzt, und x_0 als neue Variable, so dürfen wir immerhin $x_0=0$ als Gleichung des Kontinuums, in dem jenes Orthoschem sich befindet, annehmen und alle vorigen Ausdrücke für die Grenzpolynome $p_1, p_2, \dots p_n$ beibehalten. Dann seien x'_1, $x'_2, \dots x'_n$ die Werte der Variabeln, welche die Gleichungen $p_2=0,\ p_3=0, \dots p_n=0$, $x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=1$ genügen, oder die Werte des Ecks $(\overline{0234\dots n})$. Durch dieses Eck und durch die Normale $(x_1=x_2=\dots x_n=0)$ oder den Pol jenes Orthoschems gehe ein lineares zweifaches Kontinuum $(x_1 : x_2 : \dots : x_n = x'_1 : x'_2 : \dots : x'_n)$, welches das $(n+1)$-sphärische Kontinuum in einem Kreisbogen schneidet, der jenes Eck mit dem Pol verbindet. Oder kurz gesagt: man ziehe durch jenes Eck einen zum Orthoschem normalen Kreisbogen. Auf diesem nehme man eine beliebige Lösung A, so sind deren Werte

$$x_0=\sin h,\ x_1=x'_1\cos h,\ x_2=x'_2\cos h, \dots x_n=x'_n\cos h,$$

wo h ihre Höhe über dem n-sphärischen Orthoschem bezeichnet. Es ist zum voraus klar, dass alle durch diesen normalen Kreisbogen gelegten n-sphärischen Kontinuen zum Orthoschem $S(\overline{0})$ orthogonal sind, mit andern Worten, dass in ihren Gleichungen die Variable x_o fehlt. Durch jedes $(n-1)$-sphärische Perischem des letzten und durch jene Lösung A ist ein n-sphärisches Kontinuum bestimmt; man versehe die Polynome jener mit Accenten und schreibe diejenigen dieser gleich, aber ohne Accent; dem Orthoschem selbst entspreche das Polynom p_o. Man hat dann im ganzen $n+1$ ein Orthoschem umschliessende n-sphärische Kontinua, wie man sogleich an den Ausdrücken ihrer Polynome sieht:

$$p_o = x_o,\ p_1 = \frac{-(x'_1 \cos h)\, x_o + \sin h \,.\, x_1}{\sqrt{\sin^2 h + x'^2_1 \cos^2 h}},\ p_2 = p'_2,\ p_3 = p'_3, \ldots, p_n = p'_n.$$

Es ist übrigens vermöge der Formel (6) in § 20: $x'_1 = \sin(\overline{3\,4\,5 \ldots n},\, 1\,2)$; daher

$$p_1 = \frac{-x_o \sin(\overline{3\,4 \ldots n},\, 1\,2) \cos h + x_1 \sin h}{\sqrt{1 - \sin^2(\overline{3\,4 \ldots n},\, 1\,2) \sin^2 h}}.$$

Wie wir jetzt gesehen haben, kann man jedes n-sphärische Orthoschem zur Konstruktion eines $(n+1)$-sphärischen gebrauchen, indem man jenes auf eine $(n+1)$-Sphäre versetzt, auf dasselbe durch sein erstes Eck einen normalen Kreisbogen h zieht, diesen beliebig begrenzt und durch dessen Endlösung (Spitze) und jedes der n-Perischeme des gegebenen Orthoschems (Basis) ein n-sphärisches Kontinuum legt. Das erste derselben wird dann zur Basis schief, alle folgenden aber orthogonal sein; d. h. man hat ein $(n+1)$-sphärisches Orthoschem konstruiert, wovon das gegebene n-sphärische (die Basis) das erste Perischem ist, und die n übrigen dieselbe Ordnung befolgen wie die $(n-1)$-sphärischen Perischeme der Basis, durch welche sie gelegt sind.

Nach dieser Vorbereitung ist es nun leicht, irgend ein n-sphärisches Plagioschem von einer beliebig gegebenen Lösung A aus in $1.2.3 \ldots n$ Orthoscheme zu zerlegen. Es mag beiläufig bemerkt werden, dass die Zerlegung eine wahre Summe geben wird, wenn alle ursprünglichen Argumente spitz sind, und die Lösung A innerhalb des Plagioschems liegt. Weil dieser Fall die geringste Schwierigkeit für die Vorstellung hat, werde ich mich im folgenden immer so ausdrücken, als ob ich nur diesen Fall vor Augen hätte; wir haben dann den Vorteil, dass alle in Betracht kommenden Winkel positiv und kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind. Im allgemeinen aber kann die Zerlegung auch negative Orthoscheme enthalten. Ich zeige zuerst die Möglichkeit der Zerlegung, und dann gebe ich die trigonometrischen Relationen, durch welche die Argumente der Orthoscheme in Funktion derjenigen des gegebenen Plagioschems und der sphärischen Abstände seiner Perischeme von der Lösung A bestimmt sind.

Es seien zuerst ein trisphärisches Plagioschem (Kugeldreieck), begrenzt von den disphärischen Perischemen (Kreisbogen) $S\ (\bar{1})$, $S\ (\bar{2})$, $S\ (\bar{3})$, denen die Polynome p_1, p_2, p_3 entsprechen, und die Lösung A gegeben. Man ziehe von A aus auf $S\ (\bar{1})$ einen normalen Kreisbogen, $A\ (1)$ sei sein Fusspunkt. Dieser teilt $S\ (\bar{1})$ in zwei Stücke, von denen das eine nach dem monosphärischen Perischem $S\ (\overline{12})$ geht, welches wir auch als Fusspunkt betrachten und durch $A\ (1\,2)$ bezeichnen können. Dieses von $A\ (1)$ bis $A\ (1\,2)$ reichende Stück können wir als disphärisches Orthoschem betrachten, obgleich auf der Disphäre die Unterscheidung zwischen Plagioschemen und Orthoschemen eigentlich dahin fällt; und da $A\ A\ (1)$ zu demselben normal ist und durch sein erstes Eck $A\ (1)$ geht, so bekommen wir ein trisphärisches Orthoschem, welches A zur Spitze und das genannte disphärische Orthoschem, welches einen Teil von $S\ (\bar{1})$ ausmacht, zur Basis hat. Von seinen disphärischen Perischemen ist das erste der genannte Teil von $S\ (\bar{1})$, das zweite geht durch A und $S\ (\overline{12})$, das dritte durch A und $A\ (1)$. Diese Ordnung entspricht der Permutation 1 2 3. Da es im ganzen 1 . 2 . 3 solche Permutationen giebt, und jeder ein trisphärisches Orthoschem entspricht, so ist die Zerlegung des trisphärischen Plagioschems in 1 . 2 . 3 Orthoscheme bewiesen. Obgleich es auf der Stelle klar ist, dass ein Kugeldreieck mit lauter spitzen Winkeln von einem innerhalb desselben befindlichen Punkte aus in sechs rechtwinklige Kugeldreiecke zerlegt werden kann, so habe ich doch absichtlich die Sache mit dieser scheinbar unnötigen Ausführlichkeit behandelt, um am leichtesten Beispiel den Gang der nun folgenden allgemeinen Konstruktion zum voraus anzudeuten und dadurch etwas klarer zu machen.

Nehmen wir an, es sei bereits gezeigt, dass ein $(n-1)$-sphärisches Plagioschem von einer innern Lösung aus in $1 . 2 . 3 \ldots (n-1)$ Orthoscheme zerlegt werden kann, welche den Permutationen seiner Grenzpolynome entsprechen, und versuchen nun das Gleiche für ein n-sphärisches Plagioschem zu bewerkstelligen, dessen Grenzpolynome mit den Ziffern $1, 2, 3 \ldots n$ bezeichnet sein mögen. Von der gegebenen innern Lösung A aus werde auf das $(n-1)$-sphärische Perischem $S\ (\bar{1})$ ein normaler Kreisbogen gezogen, und von seinem Fusspunkte $A\ (1)$ aus dieses Perischem in $1 . 2 . 3 \ldots (n-1)$ Orthoscheme zerlegt; eines von diesen entspreche der Permutation $2\,3\,4 \ldots n$. Da $A\,(1)$ sein erstes Eck ist, und durch dieses der Kreisbogen $A\ A\ (1)$ normal zum genannten $(n-1)$-sphärischen Orthoschem gezogen ist, so ist nach dem früher Gezeigten das letzte Basis und A Spitze eines n-sphärischen Orthoschems, welches der Permutation $1\,2\,3 \ldots n$ entspricht. Wird von $A\ (1)$ auf $S\ (\overline{12})$ ein normaler Kreisbogen mit dem Fusspunkt $A\ (1\,2)$, von diesem aus auf $S\ (\overline{123})$ ein normaler Kreisbogen mit dem Fusspunkt $A\,(1\,2\,3)$, u. s. f. gezogen, so ist das erste Perischem dieses n-sphärischen Orthoschems jenes orthoschematische Stück von $S\ (1)$, das zweite geht durch $S\ (\overline{12})$ und A, das dritte durch $S\ (1\,2\,3)$, A und $A\ (1)$, das vierte durch $S\ (\overline{1234})$, A, $A\ (1)$ und $A\ (1\,2)$, und so fort,

das letzte endlich durch A, $A\ (1)$, $A\ (1\,2)$, $A\ (1\,2\,3)$, ..., $A\ (1\,2\,3\,4\ldots(n-2))$. Es ist klar, dass z. B. der Fusspunkt $A\ (1\,2\,3\ldots m)$ sich nicht ändert, wie man auch die Ziffern 1, 2, 3, . . . m permutiert. Denn, um denselben zu bestimmen, kann man auch durch das Centrum auf das $(n-m)$fache lineare Kontinuum $(\overline{1\,2\,3\ldots m})$ das normale $m$fache lineare Kontinuum legen; dieses wird mit dem nach A gehenden Radius ein $(m+1)$-sphärisches Kontinuum bestimmen, welches das $(n-m)$-sphärische Perischem $S\ (1\,2\,3\ldots m)$ im verlangten Fusspunkt $A\ (1\,2\,3\ldots m)$ trifft. Wird diese Konstruktion in Beziehung auf alle $(n-1)$-sphärischen Orthoscheme, in welche $S\ (1)$ zerfällt, wiederholt, so setzen sich die erhaltenen n-sphärischen Orthoscheme, welche den sämtlichen mit 1 anfangenden Permutationen der Ziffern 1, 2, 3 . . . n entsprechen, zu einem Plagioschem zusammen, welches A zur Spitze und das ganze Perischem $S\ (\overline{1})$ zur Basis hat. Nimmt man nun nach und nach $S\ (2)$, $S\ (3)$, . . . $S\ (n)$ als Basen, so setzen endlich alle entsprechenden Plagioscheme um die gemeinschaftliche Spitze A herum sich zum ganzen ursprünglichen Plagioschem zusammen. Da nun die Möglichkeit der Zerlegung in Orthoscheme für das trisphärische Plagioschem bewiesen ist, so ist es nach dem vorigen auch für das tetrasphärische, und so fort; sie ist also allgemein bewiesen.

Fällt die Lösung A nicht in die Begrenzung des gegebenen n-sphärischen Plagioschems, so ist aus dem Gesagten klar, dass $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n$ die Zahl der Orthoscheme sein wird, aus denen es besteht. Fällt sie aber mit einem Eck, z. B. $(\overline{2\,3\,4\ldots n})$, zusammen, so ist dieses die gemeinschaftliche Spitze von $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-1)$ Orthoschemen, deren Basen das gegenüberliegende Perischem $S\ (\overline{1})$ zusammensetzen, und mit diesen ist die Zerlegung vollendet. Wenn man also eine Zerlegung des Plagioschems in die kleinstmögliche Zahl von Orthoschemen verlangt, so muss sie von einem Eck aus gemacht werden.

Wenn wir nun zweitens die trigonometrischen Relationen anzugeben haben, durch welche die Argumente eines durch die Zerlegung entstandenen Orthoschems, z. B. desjenigen, welches der Permutation $1\,2\,3\ldots n$ entspricht, in Funktion der Argumente des gegebenen Plagioschems bestimmt sind, so liegt es uns daran, den Gebrauch der orthogonalen Werte der Lösung A, von der aus die Zerlegung geschehen soll, zu vermeiden, um nicht durch die Willkürlichkeit des orthogonalen Systems belästigt zu sein, sondern nur die wesentliche Zahl von Daten der Aufgabe in Rechnung bringen zu können. Wir bestimmen daher die Lösung A durch die Werte der Grenzpolynome $p_1, p_2, \ldots p_n$. Dann ist z. B. der Wert von p_1 der Abstand der Lösung A von dem durch $p_1 = 0$ dargestellten linearen Kontinuum $(\overline{1})$, oder, da A auf der n-Sphäre liegt, der Sinus des sphärischen Abstandes der Lösung A vom Perischem $S\ (\overline{1})$. Man kann also auch sagen, die Lösung A sei durch die Längen der auf den Perischemen normalen Kreisbogen $A\,A\ (1)$, $A\,A\ (2)$, . . . $A\,A\ (n)$ bestimmt. Weil aber A auf der Sphäre liegen soll, so

muss zwischen den Werten von $p_1, p_2, \dots p_n$ eine Relation bestehen, welche der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 + \dots = 1$ entspricht, wenn $x, y, \dots$ die orthogonalen Variabeln bedeuten. Wir finden diese leicht auf folgendem Wege.

Es seien $p_1 = a_1\, x + b_1\, y + \dots$, $p_2 = a_2\, x + b_2\, y + \dots$, etc. die Polynome. Da der Ausdruck

$$\left\| \begin{array}{c|c} x \,.\, y \,.\, z \dots & x \,.\, y \,.\, z \dots \\ a_1 \,.\, b_1 \,.\, c_1 \dots & a_1 \,.\, b_1 \,.\, c_1 \dots \\ a_2 \,.\, b_2 \,.\, c_2 \dots & a_2 \,.\, b_2 \,.\, c_2 \dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_n \,.\, b_n \,.\, c_n \dots & a_n \,.\, b_n \,.\, c_n \dots \end{array} \right\|$$

verschwinden muss, weil jede Hälfte dieses Schemas $n + 1$ Horizontalzeilen und nur n Vertikalzeilen hat, so bekommt man, indem man ihn in eine Determinante von Produktsummen verwandelt und $x^2 + y^2 + \dots = 1$ voraussetzt,

$$\left| \begin{array}{ccccc} 1 \,. & p_1 \,. & p_2 & \dots & p_n \\ p_1 \,. & 1 \,. & -\cos(12) & \dots & -\cos(1n) \\ p_2 \,. & -\cos(12) \,. & 1 & . & -\cos(2n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_n \,. & -\cos(1n) \,. & -\cos(2n) & \dots & 1 \end{array} \right| = 0 \,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (1)$$

als Gleichung des n-sphärischen Kontinuums.

Formeln zur Berechnung der Orthoscheme, in welche ein gegebenes n-sphärisches Plagioschem zerfällt.

Es seien $a\,(1)$, $a\,(2)$, $\dots$ $a\,(n)$ die Werte der Grenzpolynome $p\,(1)$, $p\,(2)$, $\dots$ $p\,(n)$, welche für die Lösung A stattfinden, von der aus die Zerlegung geschehen soll, mit andern Worten, die Sinusse ihrer sphärischen Abstände von den Perischemen; sie müssen der Relation (1) genügen. Es sei ferner

$$\left. \begin{array}{l} a\,(\overline{1}, m) = \dfrac{a\,(1) \cos(1\,m) + a\,(m)}{\sin(1\,m)}, \\[2ex] a\,(\overline{12}, m) = \dfrac{a\,(\overline{1}, 2) \cos(\overline{1}, 2\,m) + (\overline{1}, m)}{\sin(\overline{1}, 2\,m)}, \\[2ex] a\,(\overline{123}, m) = \dfrac{a\,(\overline{12}, 3) \cos(\overline{12}, 3\,m) + a\,(\overline{12}, m)}{\sin(\overline{12}, 3\,m)}, \\[2ex] \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\[1ex] a\;\overline{123\dots(n-1)}, n = \dfrac{a\,(\overline{12\dots(n-2)}, n-1) \cos(\overline{12\dots(n-2)}, (n-1)\,n) + a\,(\overline{12\dots(n-2)}, n)}{\sin(\overline{12\dots(n-2)}, (n-1)\,n)} \end{array} \right\} \quad (2)$$



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{a\,(1)}{a\,(1,2)} = \text{tang}\,\beta_1,\ \dfrac{a\,(\overline{1},2)}{a\,(12,3)} = \text{tang}\,\beta_2,\ \dfrac{a\,(\overline{12},3)}{a\,(123,4)} = \text{tang}\,\beta_3,\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots,\ \dfrac{a\,(\overline{123\ldots(n-2)},n-1)}{a\,(\overline{123\ldots(n-1)},n)} = \text{tang}\,\beta_{n-1},\end{array}\right| \quad . \ . \ (3)$$

so sind $\cos\beta_1,\ \sin\beta_1\ \cos\beta_2,\ \sin\beta_2\ \cos\beta_3, \ldots, \sin\beta_{n-2}\ \cos\beta_{n-1}$ . . . (4)
die Kosinusse der Argumente desjenigen Orthoschems, welches der Permutation $123\ldots n$ entspricht.

An diesen Satz reihe ich noch folgende Behauptungen.

Der Wert von $a\,(\overline{123\ldots i},m)$ ändert sich nicht, wie man auch die überstrichenen Ziffern $1, 2, 3, \ldots i$ permutiert. Die Gesamtzahl dieser Grössen ist demnach

$$n\,.\,2^{n-1}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Die Relation (1) verwandelt sich in

$$a\,(1)^2 + a\,(\overline{1},2)^2 + a\,(\overline{12},3)^2 + a\,(\overline{123},4)^2 + \cdots + a\,(\overline{12\ldots(n-1)},n)^2 = 1. . \quad (6)$$

Wird im Systeme (2) der Buchstabe a durch p ersetzt, d. h., denkt man sich die Werte der Variabeln nicht gegeben, sondern frei, so ist $p\,(\overline{12\ldots i},m)$ das Polynom des durch $S\,(\overline{123\ldots i}\,m)$ und orthogonal zu $S\,(\overline{1})\ldots\ldots S\,(\overline{2}),\ldots S\,(\overline{i})$ gelegten Kontinuums. . . . . (7)

Für den Fusspunkt $A\,(1\,2\,3\ldots i)$ gelten die Gleichungen:

$$p_1 = 0,\ p_2 = 0, \ldots p_i = 0,$$

$$p\,(\overline{123\ldots i},m) = \frac{a\,(\overline{123\ldots i},m)}{\sqrt{1 - a\,(1)^2 - a\,(1,2)^2 - a\,(12,3)^2 - \cdots - a\,(12\ldots(i-1),i)^2}}, \quad . \ . \ (8)$$

$$(m = i+1,\ i+2,\ i+3, \ldots n)$$

wo der Radikand im Nenner durch eine Permutation der Ziffern $1, 2, 3, \ldots i$ nicht geändert wird.

Beweis. Das durch $(1m)$ und die Lösung A gelegte lineare Kontinuum hat die Gleichung

$$a\,(1)\,p\,(m) - a\,(m)\,p\,(1) = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Die Summe der Quadrate der Koeffizienten der Variabeln auf der linken Seite ist

$$a\,(1)^2 + 2\,a\,(1)\,a\,(m)\cos(1\,m) + a\,(m)^2 = \big(a\,(1)\cos(1\,m) + a\,(m)\big)^2 + a(1)^2\sin^2(1m),$$

also nach (2) gleich

$$\big(a\,(1)^2 + a\,(1,m)^2\big)\sin^2(1\,m).$$

Das Polynom des betrachteten Kontinuums ist demnach

$$\frac{a(1)\,p(m) - a(m)\,p(1)}{\sin(m)\sqrt{a(1)^2 + a(\overline{1}, m)^2}}.$$

Wenn nun das Orthoschem, dessen Argumente wir suchen, der Permutation $1\,2\,3\ldots n$ entspricht, so ist $p(1) = q_1$ sein erstes Grenzpolynom, und

$$q_2 = \frac{a(1)\,p(2) - a(2)\,p(1)}{\sin(12)\sqrt{a(1)^2 + a(\overline{1}, 2)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

sein zweites. Ist β_1 der Winkel der Polynome q_1, q_2, so hat man

$$\cos\beta_1 = \frac{a(1)\cos(12) + a(2)}{\sin(12)\sqrt{a(1)^2 + a(\overline{1}, 2)^2}} = \frac{a(\overline{1}, 2)^2}{\sqrt{a(1)^2 + a(\overline{1}, 2)^2}}, \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

woraus sogleich

$$\operatorname{tang}\beta_1 = \frac{a(1)}{a(\overline{1}, 2)}$$

folgt.

Multiplizieren wir die Gleichung (9) mit einem beliebigen der Ziffer m entsprechenden Faktor λ_m und summieren dann für $m = 2, 3, \ldots n$, so stellt die erhaltene Gleichung ein durch A gehendes Kontinuum dar. Soll dieses noch zu $(\overline{1})$ orthogonal sein, so muss

$$\Sigma\,\lambda_m\big(a(1)\cos(1\,m) + a(m)\big) = 0$$

sein. Demnach ist für den von A aus normal auf das Grenzkontinuum $(\overline{1})$ gezogenen Kreisbogen

$$\frac{a(1)\,p(m) - a(m)\,p(1)}{a(1)\cos(1\,m) + a(m)} = \text{const.}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

während $m = 2, 3, \ldots n$ wird. Durch die hieraus entspringenden $n - 2$ Gleichungen ist das normale disphärische Kontinuum gerade bestimmt. Für den Fusspunkt kommt noch die Bedingung $p(1) = 0$ hinzu. Mit Rücksicht auf (2) haben wir also für den Fusspunkt $A(1)$:

$$\frac{p(m)}{a(\overline{1}, m)\sin(1\,m)} = \text{const.}\ (m = 2, 3, \ldots n).$$

Nach der in (7) vorausgesetzten Erweiterung des Systems (2) ist aber

$$p(\overline{1}, m) = \frac{p(1)\cos(1\,m) + p(m)}{\sin(1\,m)}.$$

Wie wir weiter unten noch erläutern werden, und wie schon durch die Bezeichnung angedeutet werden soll, hat dieses Polynom für das $(n-1)$-sphärische Perischem $S(\overline{1})$

dieselbe Bedeutung, wie $p(m)$ für das ursprüngliche n-sphärische Plagioschem. — Im vorliegenden Falle haben wir also, wegen $p(1) = 0$, für den Fusspunkt $A(1)$

$$\frac{p(\bar{1},2)}{a(\bar{1},2)} = \frac{p(\bar{1},3)}{a(\bar{1},3)} = \dots = \frac{p(\bar{1},n)}{a(\bar{1},n)} \quad \dots \dots \dots \quad (13)$$

Wir erfahren hieraus nur die Verhältnisse der Werte der Polynome $p(\bar{1}, m)$. Um ihre wirklichen Werte zu bekommen, schreiben wir in der Gleichung (1) überall a statt p, was erlaubt sein muss, weil die Lösung A auf der Polysphäre liegt. Die oberste Horizontalzeile beziffern wir mit 0, die folgenden mit $1, 2, \dots n$. Multiplizieren wir nun die Horizontalzeile [1] mit $\cos(1\,m)$ und addieren die Produkte zur Horizontalzeile $[m]$, während [1] unverändert bleibt, so ändert sich der Wert der Determinante bekanntlich nicht, und die zwei ersten Glieder der Zeile $[m]$ werden:

$$a(m) + a(1)\cos(1\,m) = a(\bar{1}, m)\sin(1\,m), \qquad 0 \quad .$$

Das Glied vom Range m wird $\sin^2(1\,m)$, und dasjenige vom Range i wird

$$-\cos(i\,m) - \cos(1\,i)\cos(1\,m) = -\sin(1\,i)\sin(1\,m)\cos(\bar{1}, i\,m);$$

diese Horizontalzeile ist also durch $\sin(1\,m)$ teilbar. Da rechts die Null steht, so kann man diesen Faktor der Determinante weglassen. Man führe dieses durch für $m = 2, 3, \dots n$. Von der Zeile [0] subtrahiere man die mit $a(1)$ multiplizierte Zeile [1], so werden ihre Glieder

$$1 - a(1)^2,\ 0,\ a(\bar{1},2)\sin(1\,2),\ a(\bar{1},3)\sin(1\,3), \dots,\ a(\bar{1},n)\sin(1\,n).$$

Bezeichnen $H_o, H_1, \dots H_n$ die ursprünglichen Horizontalzeilen, so können wir die neuen durch

$$H_o - a(1)\,H_1,\ H_1, \dots,\ (H_m + H_1\cos(1\,m)) : \sin(1\,m), \dots$$

ausdrücken. Man wird nun bemerken, dass die Vertikalzeile [1] nur im Range [1] das Glied 1, sonst lauter Nullen hat; folglich kann man auch in der Horizontalzeile [1] alle Glieder ausser dem erwähnten durch Nullen ersetzen. Jetzt ist aber die Vertikalzeile $[i]$ durch $\sin(1\,i)$ teilbar geworden. Man lasse diesen Faktor für $i = 2, 3, \dots n$ weg, so hat man endlich die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 - a(1)^2 & a(\bar{1},2) & a(\bar{1},3) & \dots & a(\bar{1},n) \\ a(\bar{1},2) & 1 & -\cos(\bar{1},23) & \dots & -\cos(\bar{1},2n) \\ a(\bar{1},3) & -\cos(\bar{1},32) & 1 & \dots & -\cos(\bar{1},3n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a(\bar{1},n) & -\cos(\bar{1},n2) & -\cos(\bar{1},n3) & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad \dots \quad (14)$$

Da diese Gleichung für das $(n-1)$-sphärische Kontinuum $(\bar{1})$ gerade dieselbe Bedeutung hat, wie die Gleichung (2) für das n-sphärische, so folgt, dass für A (1) die Grenzpolynome von $(\bar{1})$ folgende Werte bekommen:

$$p(\bar{1}, m) = \frac{a(\bar{1}, m)}{\sqrt{1 - a(1)^2}}, \ (m = 2, 3, 4, \ldots n). \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

Was am gegebenen n-sphärischen Plagioschem in Beziehung auf sein Grenzkontinuum $(\bar{1})$ und die Lösung A gethan worden ist, soll nun am $(n-1)$-sphärischen Plagioschem (1) in Beziehung auf seine Basis $(\overline{12})$ und die Lösung A (1) wiederholt werden.

Man hätte also eigentlich die Variabeln orthogonal so zu transformieren, dass das Polynom p (1) einer einzigen Variabeln gleich würde, und dann in jedem der übrigen Polynome diese Variable wegzulassen und seine zurückbleibenden Koeffizienten proportional so zu verändern, dass wiederum die Summe ihrer Quadrate = 1 wird. Nun ist z. B. im Polynom $p(m)$ der Koeffizient der zu unterdrückenden Variabeln — cos $(1m)$; die zurückbleibenden Koeffizienten sind also mit sin $(1\,m)$ zu dividieren; das entsprechende Grenzpolynom von (1) wird demnach

$$p(\bar{1}, m) = \frac{p(m) + p(1)\cos(1\,m)}{\sin(1\,m)},$$

und man braucht sich in die Transformation der Variabeln nicht einzulassen. — Mit andern Worten: Durch die Unterdrückung der mit p (1) koincidierenden Variabeln geht das Kontinuum $(\bar{m})$ in ein durch $(1\bar{m})$ gelegtes und zu (1) orthogonales über. Die erste Bedingung wird durch die Form $p(m) + \lambda\, p(1)$ erfüllt, und der Faktor λ ist durch die zweite Bedingung, $p(m) + \lambda\, p(1) \perp p(1)$ oder $\cos(1\,m) - \lambda = 0$ bestimmt. Da nun die Summe der Quadrate der Koeffizienten des Polynoms $p(m) + \lambda\, p(1)$ gleich ist $1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos(1\,m) = \sin^2(1\,m)$, so haben wir auch so wieder die obige Formel für $p(\bar{1}, m)$ bewiesen. Sie ist übrigens als spezieller Fall in den allgemeinen Formeln (1) und (2) des § 20 enthalten.

Für das folgende brauchen wir einen Ausdruck für den Winkel der Polynome $p(i)$ und $p(\bar{1}, m)$. Wir finden seinen Kosinus

$$\left.\begin{array}{l} = \dfrac{\cos(i\,m) + \cos(1\,i)\cos(1\,m)}{\sin(1\,m)} = \sin(1\,i)\cos(\bar{1}, i\,m) \\ \text{und im Besonderen für } i = m, \ = -\sin(1\,m). \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (16)$$

Nun haben wir ähnlich wie in (10) für das dritte Grenzpolynom des betrachteten Orthoschems den Ausdruck



$$q_3 = \frac{a(\bar{1},2)\,p(\bar{1},3) - a(\bar{1},3)\,p(\bar{1},2)}{\sin(1,23)\sqrt{a(1,2)^2 + a(12,3)^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Der Zähler ist eine homogene lineare Funktion von $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, also geht das Kontinuum durch (123); der Zähler verschwindet für A und wegen (15) auch für $A(1)$, das Kontinuum geht also durch beide Lösungen.

Wir haben also die negative Summe der Produkte der gleichnamigen Koeffizienten der Polynome $p(2)$ und $a(\bar{1},2)\,p(\bar{1},3) - a(\bar{1},3)\,p(\bar{1},2)$ zu berechnen; nach (16) ist sie

$$\sin(12)\left\{a(\bar{1},2)\cos(\bar{1},23) + a(\bar{1},3)\right\} = a(\bar{1}2,3)\sin(12)\sin(\bar{1},23);$$

ferner ist $p(1) \perp a(\bar{1},2)\,p(\bar{1},3) - a(\bar{1},3)\,p(\bar{1},2)$, und endlich mit Rücksicht auf den in (10) gegebenen Wert von q_2:

$$\cos\angle(q_2\,q_3) = \frac{a(1)}{\sqrt{a(1)^2 + a(1,2)^2}} \cdot \frac{a(\bar{1}2,3)}{\sqrt{a(1,2)^2 + a(12,3)^2}} = \sin\beta_1 \cos\beta_2,$$

wenn man die Abkürzungen (3) gebraucht.

Bezeichnen wir mit $p(\bar{1}\bar{2},m)$ das Polynom eines durch $(\overline{12m})$ und orthogonal zu (1) und (2) gelegten Kontinuums, so finden wir durch die oben gebrauchten Schlüsse

$$p(\bar{1}\bar{2},m) = \frac{p(\bar{1},m) + p(\bar{1},2)\cos(\bar{1},2m)}{\sin(\bar{1},2m)}. \quad \text{Vergl. (7)}$$

Es erhellt schon aus der Definition, dass dieser Ausdruck durch Vertauschung der Zeiger 1, 2 nicht geändert wird; man kann dies aber auch direkt verifizieren; denn man findet leicht

$$p(\bar{1}\bar{2},m) = \frac{p(m)\sin(12) + p(1)\sin(2m)\cos(\bar{2},1m) + p(2)\sin(1m)\cos(\bar{1},2m)}{\sin(12)\,.\,\sin(1m)\sin(\bar{1},2m)},$$

wo hinsichtlich des Nenners zu bemerken ist, dass $\sin(1m)\sin(\bar{1},2m) = \sin(2m)\sin(\bar{2},1m)$. Wenn aber $p(\bar{1}\bar{2},m) = p(\bar{2}\bar{1},m)$, so folgt von selbst, dass auch $a(\bar{1}\bar{2},m) = a(\bar{2}\bar{1},m)$. Hieraus kann leicht die Richtigkeit der Behauptung (5) gefolgert werden.

Wie aus der Gleichung (1) die Gleichung (14) sich ergab, so kann aus dieser wiederum die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 - a(1)^2 - a(\bar{1},2)^2 & a(\bar{1}\bar{2},3) & \ldots & a(\bar{1}\bar{2},n) \\ a(\bar{1}\bar{2},3) & 1 & \ldots & -\cos(\bar{1}\bar{2},3n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a(\bar{1}\bar{2},n) & -\cos(\bar{1}\bar{2},n3) & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad (18)$$

hergeleitet werden, und es folgt, dass der Ausdruck $a\,(1)^2 + a\,(\overline{1},2)^2$ sich nicht ändert, wenn man auch die Ziffern 1 und 2 vertauscht. Setzt man dies weiter fort, so erhält man durch wiederholte Anwendung derselben Schlüsse, durch welche (13) und (15) gefunden wurden, für den Fusspunkt $A\ (1\ 2\ 3\ \ldots\ i)$ die Gleichungen (8). Da zuletzt das Polynom $p\,(\overline{1\,2\,3\ldots(n-1)},\,n)$ nur noch eine Variable enthält, und diese der Gleichung*) der Monosphäre, so ist sein Wert ± 1; daraus folgt die Gleichung (6). Das Gleiche folgt auch aus der fortgesetzten Reduktion der Gleichung (18).

Es ist leicht, die Gleichung (17) zu verallgemeinern; man hat

$$q_m = \frac{a\,(\overline{1\,2\ldots(m-2)},\,m-1)\,p\,(\overline{1\,2\ldots(m-2)},\,m) - a\,(\overline{1\,2\ldots(m-2)},\,m)\,p\,(\overline{1\,2\ldots(m-2)},\,m-1)}{\sin\,(\overline{1\,2\ldots(m-2)},\,(m-1)\,m)\,\sqrt{a\,(\overline{1\,2\ldots(m-2)},\,m-1)^2 + a\,(\overline{1\,2\ldots(m-1)},\,m)^2}}.$$

Aus dieser allgemeinen Formel für ein Grenzpolynom des Orthoschems folgt dann

$$\cos\angle\,(q_m\,q_{m+1}) = \frac{a\,(\overline{1\,2\ldots(m-2)},\,m-1)}{\sqrt{a\,(\overline{1\,2\ldots(m-2)},\,m-1)^2 + a\,(\overline{1\,2\ldots(m-1)},\,m)^2}}\cdot\frac{a\,(\overline{1\,2\ldots m},\,m+1)}{\sqrt{a\,(\overline{1\,2\ldots(m-1)},\,m)^2 + a\,(\overline{1\,2\ldots m},\,m+1)^2}}$$

$$= \sin\beta_{m-1}\,\cos\beta_m. \quad \text{Vergl. (4).}$$

Wenn die Bedingung für die Quadratsumme der Koeffizienten nicht erfüllt zu sein braucht, so kann man das $m$te Grenzkontinuum des Orthoschems auch durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1\cdot & -\cos(1\,2)\cdot & -\cos(1\,3)\cdot & \cdots & -\cos(1\ (m-2))\cdot & a\ (1)\cdot & p\ (1) \\ -\cos(2\,1)\cdot & 1\cdot & -\cos(2\,3)\cdot & \cdots & -\cos(2\ (m-2))\cdot & a\ (2)\cdot & p\ (2) \\ -\cos(3\,1)\cdot & -\cos(3\,2)\cdot & 1\cdot & \cdots & -\cos(3\ (m-2))\cdot & a\ (3)\cdot & p\ (3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\cos(m\,1)\cdot & -\cos(m\,2)\cdot & -\cos(m\,3)\cdot & \cdots & -\cos(m\ (m-2))\cdot & a\ (m)\cdot & p\ (m) \end{vmatrix} = 0$$

darstellen. Es erhellt aus dieser Form der Gleichung sogleich, dass das Kontinuum durch $(\overline{1\ 2\ 3\ \ldots\ m})$ und A geht und zu allen durch $(\overline{1\ 2\ldots(m-2)})$ gelegten Kontinuen orthogonal ist, und dass eine Permutation der Zeiger $1, 2, 3, \ldots m-2$ keinen Einfluss hat.

§ 26. *Reduktion der perissosphärischen Orthoscheme auf artiosphärische.*

Auf den ersten Blick scheint die Aufgabe dieses Paragraphen schon mit derjenigen des § 24, welche sich auf Plagioscheme überhaupt bezog, zugleich gelöst zu sein, indem man nichts weiter zu thun brauche, als die dortige Gleichung (1) dem besondern Fall eines Orthoschems anzupassen. Dieses Geschäft kann für niedrige Dimensionszahlen allerdings

---

*) So im Manuscript.!

ausgeführt werden. Da aber der in § 23 betrachtete Fall, wo eine plagioschematische Funktion in ein Produkt zweier anderer zerfällt, sehr oft mit perissosphärischen Faktoren eintritt, und diese dann wiederum durch lineare Polynome artiosphärischer Funktionen dargestellt werden müssen, so mag es schwer halten, auf diesem Wege zu einem allgemeinen Gesetz zu gelangen. Hingegen wird die Lösung der speziellen Aufgabe dieses Paragraphen ganz leicht, wenn man sie unmittelbar angreift, ohne von der Gleichung (1) in § 24 auszugehen.

Zur Vorbereitung auf das folgende diene diese auf § 23 gestützte Bemerkung. Bedeutet $f(1\,2\,3\,4\ldots n)$ eine orthoschematische Funktion, wo die Ziffern den Grenzpolynomen entsprechen, und die Ordnung derselben die bekannte Bedeutung hat, also bloss umgekehrt, aber sonst nicht durch Permutation verändert werden darf, und man lässt einige Polynome weg, sodass die Folge der übrigen durch Lücken unterbrochen wird, so sind alle zwischen zwei Lücken oder zwischen einer Lücke und dem Anfang oder Ende der ursprünglichen Reihe enthaltenen Polynome zu jedem der übrigen orthogonal; daher findet die in § 23 gelehrte Zerfällung einer Funktion in Faktoren ihre Anwendung auf jede niedrigere orthoschematische Funktion, welche einer durch Lücken unterbrochenen Kombination der gegebenen Polynome entspricht. Ist z. B. $m-i>1$, $m<n$, so ist

$$f(1\;2\;3\ldots i\;m\;(m+1)\ldots n)=f(1\;2\;3\ldots i)\,f(m\;(m+1)\ldots n)\,.$$

Im folgenden Satze können nur artiosphärische Faktoren vorkommen.

Satz. Wenn f_{2n+1} die einem perissosphärischen Orthoschem entsprechende Funktion bezeichnet, und man lässt in der Reihe seiner $2n+1$ Grenzpolynome deren $2i+1$ auf alle möglichen Arten so weg, dass jede der ununterbrochenen Reihen, in welche die ursprüngliche Reihe durch die entstandenen Lücken getrennt wird, eine gerade Anzahl von Polynomen enthält; bezeichnet man ferner die Summe aller Funktionen, welche den erwähnten Kombinationen der Grenzpolynome entsprechen, mit Σf_{2n-2i}, wo die einzelnen Glieder teils einzelne Funktionen, teils Produkte von solchen sind, je nachdem in der betreffenden Kombination alle Polynome eine fortlaufende oder durch Lücken unterbrochene Reihe bilden, — so ist

$$f_{2n+1}=\sum_{i=0}^{i=n}\frac{(-1)^i}{i+1}\binom{2i}{i}\Sigma f_{2n-2i}\,.\qquad\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

z. B.



$$f(1\,2\,3) = f(2\,3) + f(1\,2) - 1,$$

$$f(1\,2\,3\,4\,5) = f(2\,3\,4\,5) + f(1\,2)f(4\,5) + f(1\,2\,3\,4) - \left\{ f(4\,5) + f(3\,4) + f(2\,3) + f(1\,2) \right\} + 2,$$

$$f(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7) = f(2\,3\,4\,5\,6\,7) + f(1\,2)f(4\,5\,6\,7) + f(1\,2\,3\,4)f(6\,7) + f(1\,2\,3\,4\,5\,6)$$
$$- \left\{ f(4\,5\,6\,7) + f(3\,4)f(6\,7) + f(3\,4\,5\,6) + f(2\,3)f(6\,7) + f(2\,3)f(5\,6) \right.$$
$$\left. + f(2\,3\,4\,5) + f(1\,2)f(6\,7) + f(1\,2)f(5\,6) + f(1\,2)f(4\,5) + f(1\,2\,3\,4) \right\}$$
$$+ 2 \left\{ f(6\,7) + f(5\,6) + f(4\,5) + f(3\,4) + f(2\,3) + f(1\,2) \right\} - 5.$$

Beweis. Es frägt sich zuerst, wie oft man aus der Reihe $1, 2, 3, 4, \ldots (2n+1)$ je zwei $2i+1$ Ziffern weglassen kann, sodass jede der zurückbleibenden fortlaufenden Reihen eine gerade Anzahl von Ziffern enthält. Man ordne die zurückgebliebenen Ziffern paarweise, so hat man $n-i$ Paare, und denke sich jedes Paar durch ein einziges Symbol ersetzt. Zählt man die weggelassenen Ziffern einzeln ebenfalls als Symbole, so sind deren im ganzen $n+i+1$, und man hat eine gewöhnliche Kombination $(2i+1)$ter Klasse aus $n+i+1$ Elementen. Die Summe Σf_{2n-2i} zählt also $\binom{n+i+1}{2i+1}$ Glieder.

Sind nun alle $2n+1$ Polynome unter sich orthogonal, so hat jede Funktion f den Wert 1; und, wenn die Gleichung (1) richtig ist, so muss

$$1 = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(-1)^i}{i+1} \binom{2i}{i} \binom{n+i+1}{2i+1} \qquad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

sein. Bedeutet h_n die Summe rechts, so ist

$$h_n - h_{n-1} = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(-1)^i}{i+1} \binom{2i}{i} \binom{n+i}{2i} = \frac{1}{n} \Sigma (-1)^i \binom{n+i}{i+1} \binom{n}{i}$$
$$= -\frac{1}{n} \Sigma \binom{-n}{i+1} \binom{n}{n-i} = -\frac{1}{n} \binom{0}{n+1} = 0.$$

Also ist $h_n = h_{n-1} = h_{n-2} = \cdots = h_1 = h_0$; und, da $h_0 = 1$ ist, so ist die Gleichung (2) allgemein gültig. Daraus ist zu schliessen, dass, wenn die Form der Gleichung (1) die richtige ist, die Koeffizienten ebenfalls richtig gesetzt sind.

Um die Form zu prüfen, differentiieren wir die Gleichung (1) nach irgend einem Argument der Funktion f_{2n+1} und erhalten offenbar eine Gleichung von derselben Form, mit dem einzigen Unterschiede, dass die zwei das variierte Argument einschliessenden Polynome herausgefallen, und durch die Unterdrückung des zu beiden normalen zweifachen Kontinuums die zwei benachbarten Polynome verändert sind. Wenn also der zu beweisende Satz für die $(2n-1)$-Sphäre bereits zugegeben ist, so kann man durch

blosse Integration auf die Richtigkeit der Gleichung (1) schliessen, indem man zugleich die Integrationskonstante nach (2) bestimmt. Da nun der Satz (1) für die Trisphäre richtig ist, so ist hiermit seine allgemeine Geltung bewiesen.

§ 27. *Perioden artiosphärischer Orthoscheme.*

Wenn ein Plagioschem $S\,(1\,2\,3\ldots n)$ verschwindet, so sind seine Grenzpolynome nicht alle unter sich unabhängig; die Determinante ihrer Koeffizienten wird also verschwinden, oder, wenn man will, das Quadrat derselben, die Determinante der negativen Kosinus der Argumente, welche wir in § 20 mit $\varDelta\,(1\,2\,3\ldots n)$ bezeichnet haben. Nach demselben Paragraphen ist z. B.

$$\sin^2\left(\overline{3\,4\,5\ldots n},\,1\,2\right) = \frac{\varDelta\,(1\,2\,3\,4\ldots n)\,\varDelta\,(3\,4\,5\ldots n)}{\varDelta\,(2\,3\,4\ldots n)\,\varDelta\,(1\,3\,4\,5\ldots n)}.$$

Wenn also keine der Determinanten $(n-1)$-ten Grades verschwindet, so müssen beim Verschwinden des Plagioschems $S\,(1\,2\,3\ldots n)$ auch die Sinusse aller seiner Seiten verschwinden; aber diese selbst können dann immer noch 0 oder π sein. Man darf aber im allgemeinen nicht umgekehrt von $\varDelta\,(1\,2\,3\ldots n) = 0$ aus auf das Verschwinden des Plagioschems schliessen. Wenn man jedoch sicher weiss, dass alle Seiten verschwinden, so überzeugt uns schon die unmittelbare, ich möchte sagen, geometrische Anschauung, dass das Plagioschem verschwindet. Setzen wir jetzt den Fall, dass alle Argumente von $S\,(1\,2\,3\ldots n)$ im ersten Quadranten liegen, so folgt aus

$$\cos\left(\bar{1},2\,3\right) = \frac{\cos(2\,3) + \cos(1\,2)\cos(1\,3)}{\sin(1\,2)\sin(1\,3)}, \text{ etc.,}$$

dass das nämliche auch für alle Argumente der $(n-1)$-sphärischen Perischeme gilt, denn $\cos\left(\bar{1},2\,3\right)$ kann in diesem Falle nur positiv sein; daraus folgt aber weiter, dass auch alle $(n-2)$-sphärischen Argumente spitz sind, und so fort, zuletzt, dass die Seiten alle im ersten Quadranten liegen. Ist nun auch noch $\varDelta\,(1\,2\,3\ldots n) = 0$, während keine der ähnlichen Determinanten $(n-1)$-ten Grades verschwindet, so kann hieraus nur auf das Verschwinden sämtlicher Seiten, also auch des Plagioschems selbst, geschlossen werden. Erwägt man die Sache noch genauer, so findet man, dass auch keine Determinante $(n-1)$-ten Grades verschwinden kann. Denn, wäre z. B. $\varDelta\,(2\,3\,4\ldots n) = 0$, während keine Determinante $(n-2)$-ten Grades verschwindet, so müssten nach der Formel

$$\sin^2\left(\overline{4\,5\ldots n},\,2\,3\right) = \frac{\varDelta\,(2\,3\,4\,5\ldots n)\,\varDelta\,(4\,5\ldots n)}{\varDelta\,(2\,4\,5\ldots n)\,\varDelta\,(3\,4\,5\ldots n)}$$

alle aus den Ziffern $2, 3, 4, \ldots n$ gebildeten trisphärischen Stücke, wie $\left(\overline{4\,5\ldots n},\,2\,3\right)$ verschwinden, und, da alsdann z. B. in der Gleichung

$$\cos(\overline{345\ldots n, 12}) = \frac{\cos(\overline{45\ldots n, 12}) + \cos(\overline{45\ldots n, 13})\cos(\overline{45\ldots n, 23})}{\sin(\overline{45\ldots n, 13})\sin(\overline{45\ldots n, 23})}$$

rechts der Nenner des Bruchs verschwände, so müsste auch der Zähler verschwinden, was nicht sein kann, da derselbe die Summe zweier positiver Grössen ist. Der gleiche Schluss ist auf die Annahme anwendbar, dass eine Determinante $(n-2)$-ten Grades, aber keine $(n-3)$-ten Grades verschwinde, und so fort. Eine Determinante zweiten Grades endlich, wie $\Delta(12)$ kann nicht verschwinden, weil sonst ein ursprüngliches Argument (12) gleich Null sein müsste. Demnach ist folgender Schluss rückwärts sicher:

Wenn alle Argumente des Plagioschems $S(123\ldots n)$ positiv und spitz sind, und es verschwindet die Determinante $\Delta(123\ldots n)$ der negativen Kosinus der Argumente, so muss auch das Plagioschem verschwinden.

Für ein Orthoschem $S(123\ldots n)$ ist

$$\Delta(123\ldots n) = \begin{vmatrix} 1 & -\cos(12) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\cos(21) & 1 & -\cos(23) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(32) & 1 & -\cos(34) & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & -\cos((n-1)n) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -\cos(n(n-1)) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \Delta(234\ldots n) - \cos^2(12)\,\Delta(34\ldots n) = \Delta(123\ldots(n-1)) - \cos^2((n-1)n)\,\Delta(123\ldots(n-2)).$$

Gebrauchen wir einfache Zeichen für die Argumente, indem wir $(12)=\alpha, (23)=\beta, (34)=\gamma, \ldots, ((n-1)n)=\Theta$ und $\Delta(123\ldots n) = \Delta_n(\alpha, \beta, \ldots \Theta)$ setzen, wo der untere Zeiger bei Δ den Grad der Determinante bedeutet, so haben wir zur successiven Berechnung derselben folgende Reihe von Gleichungen:

$$\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 1, \Delta_2(\alpha) = \Delta_1 - \Delta_0 \cos^2\alpha = \sin^2\alpha, \Delta_3(\alpha,\beta) = \Delta_2 - \Delta_1\cos^2\beta$$
$$= \sin^2\alpha - \cos^2\beta,\ \Delta_4(\alpha,\beta,\gamma) = \Delta_3 - \Delta_2\cos^2\gamma = \sin^2\alpha\sin^2\gamma - \cos^2\beta,$$
$$\ldots, \Delta_n(\alpha,\beta,\ldots\zeta,\eta,\Theta) = \Delta_{n-1}(\alpha,\beta,\ldots\zeta,\eta) - \cos^2\Theta\,\Delta(\alpha,\beta,\ldots\zeta). \quad \ldots \quad (1)$$

Die Realität des Orthoschems $S(\alpha, \beta, \ldots \eta, \Theta)$ erfordert, dass keine dieser Determinanten negativ sei. Die Reihe ihrer Werte nimmt also fortwährend ab, und daher ist es nicht möglich, dass eine ausser der letzten verschwinde. Man sieht leicht, dass die Determinanten auch durch Kettenbrüche definiert werden können; denn es ist z. B.

$$\frac{\Delta(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \eta, \Theta)}{\Delta(\beta, \gamma, \delta, \ldots \eta, \Theta)} = 1 - \cfrac{\cos^2\alpha}{1 - \cfrac{\cos^2\beta}{1 - \cfrac{\cos^2\gamma}{1 - \cfrac{\cos^2\delta}{1 - \ddots - \cfrac{\cos^2\eta}{1 - \cos^2\Theta}}}}}$$

Aus (1) folgt auch leicht

$$\varDelta(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon, \zeta, \eta, \Theta) + \cos^2\eta\, \varDelta(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon) = \sin^2\Theta\, \varDelta(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon, \zeta).$$

Wenn also $\varDelta(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon, \zeta, \eta, \Theta) = 0$ ist, so hat man

$$\cos^2\Theta = \frac{\varDelta(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon, \zeta, \eta)}{\varDelta(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon, \zeta)}, \quad \sin^2\Theta = \cos^2\eta\, \frac{\varDelta(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon)}{\varDelta(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon, \zeta)}.$$

Zwei Sätze über die mit $\varDelta$ bezeichneten Funktionen mögen das folgende vorbereiten.

1. Es ist

$$\begin{vmatrix} \varDelta(\beta, \gamma, \ldots \eta, \Theta) \cdot \varDelta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \eta, \Theta) \\ \varDelta(\beta, \gamma, \ldots \eta) \cdot \quad \varDelta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \eta) \end{vmatrix} = \cos^2\alpha \begin{vmatrix} \varDelta(\gamma, \ldots \eta, \Theta) \cdot \varDelta(\beta, \gamma, \ldots \eta, \Theta) \\ \varDelta(\gamma, \ldots \eta) \cdot \quad \varDelta(\beta, \gamma, \ldots \eta) \end{vmatrix}.$$

Um dieses zu beweisen, braucht man nur im Schema links die erste Vertikalzeile von der zweiten abzuziehen und dann beide Zeilen zu vertauschen, indem man zugleich das Vorzeichen der Determinante verändert. Wenn man aber die Determinante rechts wieder so behandelt und dieses Verfahren fortsetzt, so gelangt man zuletzt zur Derminante

$$\begin{vmatrix} \varDelta_1 \,.\, \varDelta_2\,(\Theta) \\ \varDelta_0 \,.\, \varDelta_1 \end{vmatrix} = 1 - \sin^2\Theta = \cos^2\Theta;$$

also ist

$$\varDelta(\alpha, \beta, \ldots \eta)\, \varDelta(\beta, \ldots \eta, \Theta) - \varDelta(\alpha, \beta, \ldots \eta, \Theta)\, \varDelta(\beta, \ldots \eta) = \cos^2\alpha \cos^2\beta \cos^2\gamma \ldots \cos^2\Theta. \quad (2)$$

2. Multipliziert man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varDelta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \zeta) &= \varDelta(\beta, \gamma, \ldots\ldots \zeta) - \cos^2\alpha\, \varDelta(\gamma, \delta, \ldots \zeta), \\ \varDelta(\beta, \gamma, \delta, \ldots \zeta, \eta) &= \varDelta(\gamma, \delta, \ldots \zeta, \eta) - \cos^2\beta\, \varDelta(\delta, \ldots \zeta, \eta), \\ \varDelta(\gamma, \delta, \ldots \zeta, \eta, \Theta) &= \varDelta(\gamma, \delta, \ldots \zeta, \eta) - \cos^2\Theta\, \varDelta(\gamma, \delta, \ldots \zeta), \\ \varDelta(\delta, \ldots \zeta, \eta, \Theta, \alpha) &= \varDelta(\delta, \ldots \zeta, \eta, \Theta) - \cos^2\alpha\, \varDelta(\delta, \ldots \zeta, \eta) \end{aligned}$$

resp. mit $\varDelta(\delta, \ldots \zeta, \eta)$, $-\varDelta(\delta, \ldots \zeta)$, $\varDelta(\delta, \ldots \zeta)$, $-\varDelta(\gamma, \delta, \ldots \zeta)$,

addiert sie und bezeichnet die Summe links mit G, so hat man

$$\begin{aligned} G = \varDelta(\delta, \ldots \zeta, \eta) &\left\{ \varDelta(\beta, \gamma, \delta, \ldots \zeta) + \cos^2\beta\, \varDelta(\delta, \ldots \zeta) \right\} \\ - \varDelta(\gamma, \delta, \ldots \zeta) &\left\{ \varDelta(\delta, \ldots \zeta, \eta, \Theta) + \cos^2\Theta\, \varDelta(\delta, \ldots \zeta) \right\} \\ = \varDelta(\delta, \ldots \zeta, \eta) &\quad \varDelta(\gamma, \delta, \ldots \zeta) - \varDelta(\gamma, \delta, \ldots \zeta)\, \varDelta(\delta, \ldots \zeta, \eta) = 0. \end{aligned}$$

Man hat also die identische Gleichung

$$\Delta(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots\zeta)\,\Delta(\delta,\ldots\zeta,\eta)-\Delta(\delta,\ldots\zeta,\eta,\Theta,\alpha)\,\Delta(\gamma,\delta,\ldots\zeta)$$
$$=\Big\{\Delta(\beta,\gamma,\delta,\ldots\zeta,\eta)-\Delta(\gamma,\delta,\ldots\zeta,\eta,\Theta)\Big\}\,\Delta(\delta,\ldots\zeta)\,.\quad\ldots\ldots\quad(3)$$

Um nun zum eigentlichen Gegenstand dieses Paragraphen überzugehen, setzen wir den Fall, wo in der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen die perissosphärische Funktion links verschwindet. Es seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \varkappa, \lambda, \mu$ ihre $2n$ Argumente, so giebt die erwähnte Gleichung die Summe der zwei artiosphärischen Orthoscheme

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \varkappa, \lambda) + f(\beta, \gamma, \delta, \ldots, \varkappa, \lambda, \mu)$$

in ganzer Funktion artiosphärischer Orthoscheme niedrigerer Ordnung. Man kann aber eine in sich zurückkehrende Reihe solcher Gleichungen auf folgendem Wege erhalten.

Die $2n-1$ Argumente $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \varkappa, \lambda$ seien frei im ersten Quadranten gegeben, aber so, dass ihre Determinante positiv wird; dann seien drei fernere Argumente μ, ν, ξ durch die Gleichungen

$$\Delta(\alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu) = 0,\ \Delta(\beta, \gamma, \ldots \mu, \nu) = 0,\ \Delta(\gamma, \delta, \ldots \nu, \xi) = 0\quad\ldots\quad(4)$$

bestimmt. Da nur die Quadrate der Kosinusse hier vorkommen, so steht es uns frei, auch μ, ν, ξ im ersten Quadranten zu nehmen. Da $\Delta(\gamma, \delta, \ldots \lambda, \mu)$ positiv ist, so folgt nach (3) aus den drei Gleichungen (4)

$$\Delta(\delta, \varepsilon, \ldots \nu, \xi, \alpha) = 0.\quad\ldots\ldots\ldots\quad(5)$$

Ebenso folgt aus den zwei letzten Gleichungen (4) und aus (5) die Gleichung

$$\Delta(\varepsilon, \ldots \nu, \xi, \alpha, \beta) = 0,$$

und so fort; überhaupt verschwindet jede Determinante, welche sich auf $2n$ successive Argumente der durch fortwährende Wiederholung der $(2n+2)$-gliedrigen Periode $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \varkappa, \lambda, \mu, \nu, \xi$ bezieht. Daher verschwindet auch jedes perissosphärische Orthoschem, welches einer solchen Determinante entspricht. Wendet man immer die Gleichung (1) des § 26 an, so sieht man eine Periode der $(2n+2)$-artiosphärischen Orthoscheme $f(\alpha, \beta, \ldots \lambda)$, $f(\beta, \gamma, \ldots \mu)$, $f(\gamma, \delta, \ldots \nu)$, $f(\delta, \varepsilon, \ldots \xi)$, $\ldots$, $f(\xi, \alpha, \ldots \varkappa)$ entstehen, wo immer die Summe von zwei unmittelbar auf einander folgenden Gliedern als ganze Funktion niedrigerer artiosphärischer Orthoscheme gegeben ist. Man kann also auch entweder die Summe oder den Unterschied von irgend zwei getrennten Gliedern der Periode auf ähnliche Weise ausdrücken, je nachdem eine gerade oder ungerade Zahl von Gliedern dazwischen liegt. Wenn im ersten Falle beide Glieder einander gleich sind, so ist jedes derselben durch niedrigere Orthoscheme ausgedrückt, ein Umstand, den wir im folgenden Paragraphen betrachten werden.



Wir wollen die drei letzten Argumente μ, ν, ξ der Periode durch die unabhängigen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa, \lambda$ ausdrücken. Man hat auf der Stelle

$$\cos^2 \mu = \frac{\Delta(\alpha, \beta, \ldots \varkappa, \lambda)}{\Delta(\alpha, \beta, \ldots \varkappa)}, \quad \cos^2 \xi = \frac{\Delta(\alpha, \beta, \ldots \varkappa, \lambda)}{\Delta(\beta, \ldots \varkappa, \lambda)}, \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

wofür man auch die entsprechenden Kettenbrüche setzen kann. Um ν zu finden, müssen wir aus der Gleichung

$$\cos^2 \nu = \frac{\Delta(\beta, \gamma, \ldots \lambda, \mu)}{\Delta(\beta, \gamma, \ldots \varkappa, \lambda)}$$

μ eliminieren. Wegen $\Delta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda, \mu) = 0$ giebt uns die Relation (2)

$$\Delta(\alpha, \beta, \ldots \varkappa, \lambda)\ \Delta(\beta, \gamma, \ldots \lambda, \mu) = \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma \ldots \cos^2 \lambda \cos^2 \mu.$$

Mittelst (6) bekommen wir also

$$\cos^2 \nu = \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma \ldots \cos^2 \lambda}{\Delta(\alpha, \beta, \ldots \varkappa, \lambda)\ \Delta(\beta, \gamma, \ldots \varkappa, \lambda)} \cdot \frac{\Delta(\alpha, \beta, \ldots \varkappa, \lambda)}{\Delta(\alpha, \beta, \ldots \varkappa)},$$

oder endlich

$$\left.\begin{aligned} \cos^2 \nu &= \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma \ldots \cos^2 \lambda}{\Delta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa)\ \Delta(\beta, \gamma, \ldots \varkappa, \lambda)}, \\ \cos^2 \nu &= \frac{\Delta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa, \lambda)\ \Delta(\beta, \gamma, \ldots \varkappa)}{\Delta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa)\ \Delta(\beta, \gamma, \ldots \varkappa, \lambda)}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Zum Schlusse wollen wir den Grund der Periodicität der Argumente in den Polynomen selbst aufsuchen. Es sei n die gerade Dimensionszahl eines Orthoschems $S(1\,2\,3 \ldots n)$ und ein $(n+1)$-tes Polynom durch die Bedingung $\Delta(1\,2 \ldots n\,(n+1)) = 0$ bestimmt, sodass das perissosphärische Orthoschem $S(1\,2\,3 \ldots n\,(n+1))$ verschwindet. Wenn man nun auch $n+1$ orthogonale Variabeln gebraucht, so kann man doch ihr System immer so einrichten, dass die n ersten Polynome nur die n Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ enthalten. Wegen des Verschwindens der Determinante muss aber das Polynom p_{n+1} von den vorigen abhängen und kann daher x_{n+1} auch nicht enthalten. Aus $\Delta(2\,3 \ldots n\,(n+1)\,(n+2)) = 0$ wird das Gleiche in Beziehung auf p_{n+2} geschlossen, und so fort. Da also die Variable x_{n+1} nirgends vorkommt, so hat die Betrachtung sich auf die n-Sphäre zu beschränken. — Wie im Eingang zu § 25 gezeigt ward, kann man bei der Darstellung eines Orthoschems die Variabeln immer so wählen, dass das erste Grenzpolynom nur eine, jedes folgende nur zwei Variabeln und zwar immer eine neue enthält. Wendet man dieses auf das verschwindende Orthoschem $S(1\,2\,3 \ldots n\,(n+1))$ an, so erhalten die Polynome $p_1, p_2, \ldots p_n$ dieselben Ausdrücke wie in § 25, dagegen wird $p_{n+1} = -x_n$. Da ferner $S(2\,3\,4 \ldots n\,(n+1)\,(n+2)) = 0$ sein soll, so hat man

ein neues Polynom p_{n+2} zu suchen, welches zu $p_2, p_3, \dots p_n$ orthogonal ist; es ist durch diese Bedingungen vollkommen bestimmt und wird im allgemeinen alle Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ enthalten. Soll ein folgendes Polynom, ohne eine neue Variable aufzunehmen, zu $p_3, p_4, \dots p_n, p_{n+1}$ orthogonal sein, so erfüllt nur p_1 diese Bedingung, sodass man $S(3\,4 \dots n\,(n+1)\,(n+2)\,1) = 0$ hat. Wie dies weiter geht, ist klar; wir sehen daraus, dass auch die Polynome $p_1, p_2, \dots p_n, p_{n+1}, p_{n+2}$ eine Periode bilden.

§ 28. *Anwendung des vorigen auf die Bestimmung artiosphärischer Orthoscheme in einigen besondern Fällen.*

Es ist leicht zu beweisen, dass überhaupt

$$\varDelta(\alpha, \dots \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \Theta, \dots \lambda) = \varDelta(\alpha, \dots \delta, \varepsilon)\,\varDelta(\eta, \Theta, \dots \lambda) - \cos^2\zeta\,\varDelta(\alpha, \dots \delta)\,\varDelta(\Theta, \dots \lambda) \quad (1)$$

ist. Denn nehmen wir an, die Formel sei bis zu einer gewissen Zahl von Argumenten $\eta, \Theta, \dots \varkappa, \lambda$, welche auf ζ folgen, bereits bewiesen, und denken uns die vorliegende Gleichung (1) noch einmal mit Weglassung des letzten Arguments λ geschrieben, multiplizieren diese mit $-\cos^2\mu$ und fügen sie der vorigen hinzu, so ergiebt sich offenbar eine ähnliche Gleichung, worin μ als letztes Argument erscheint, und daher die Zahl der auf ζ folgenden Argumente $\eta, \Theta, \dots \varkappa, \lambda, \mu$ um 1 grösser ist als vorhin. Da nun die Richtigkeit der Formel (1) für ein einziges auf ζ folgendes Argument η leicht einzusehen ist, so ist dieselbe allgemein bewiesen.

I. Vergegenwärtigen wir uns wieder die in § 27 behandelte Periode von $2n+2$ Argumenten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots \varkappa, \lambda, \mu, \nu, \xi$ und verlangen, dass das $(n+2)$-te Orthoschem mit dem ersten $S(\alpha, \beta, \dots \varkappa, \lambda)$ direkt zusammenfalle, so ist klar, dass auch die Periode der Argumente aus zwei direkt kongruenten Hälften bestehen muss; sie sei

$$\alpha, \beta, \gamma, \dots \varepsilon, \zeta, \eta, \Theta, \alpha, \beta, \gamma, \dots \varepsilon, \zeta, \eta, \Theta.$$

Von den drei Bedingungsgleichungen, denen diese Argumentenreihe genügen muss; untersuchen wir nur die erste

$$\varDelta(\alpha, \beta, \dots \zeta, \eta, \Theta, \alpha, \beta, \dots \varepsilon, \zeta) = 0,$$

mit der Absicht, sie nach $\cos^2\Theta$ aufzulösen. Wir finden nach (1)

$$\varDelta(\alpha, \beta, \dots \zeta) \left\{ \varDelta(\alpha, \beta, \dots \zeta, \eta) - \cos^2\Theta\,\varDelta(\beta, \dots \varepsilon, \zeta) \right\} = 0,$$

also, da $\varDelta(\alpha, \beta, \dots \zeta)$ nicht verschwinden darf,

$$\varDelta(\alpha, \beta, \dots \zeta, \eta) - \cos^2\Theta\,\varDelta(\beta, \dots \varepsilon, \zeta) = 0. \quad \dots\dots \quad (2)$$

Machen wir hier $\cos^2 \eta$ frei, so bekommen wir

$$\varDelta(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon, \zeta) - \cos^2 \Theta \, \varDelta(\beta, \ldots \varepsilon, \zeta) - \cos^2 \eta \, \varDelta(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon) = 0,$$

oder auch

$$\varDelta(\Theta, \alpha, \beta, \ldots \varepsilon, \zeta) - \cos^2 \eta \, \varDelta(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon) = 0,$$

d. h. die Gleichung (2) koincidiert mit einer ähnlichen, worin die periodische Argumentenreihe um ein Glied zurückgeschoben erscheint. Die eine und selbe Gleichung (2) kann also im ganzen unter $n+1$ Gestalten erscheinen, welche durch eine Art von Kreisbewegung der $n+1$ Argumente in einander übergehen. Da nun die drei Bedingungsgleichungen, von denen im Anfang gesprochen wurde, nichts anders als die resp. mit den Faktoren $\varDelta(\alpha, \beta, \ldots \zeta)$, $\varDelta(\beta, \gamma, \ldots \zeta, \eta)$, $\varDelta(\gamma, \ldots \eta, \Theta)$ multiplizierte Gleichung (2) sind, so sind sie alle zugleich mit dieser Gleichung (2) erfüllt. Dass die Gleichung (2) von der Wahl des Anfangs der Argumentenreihe unabhängig ist, kann auch unmittelbar eingesehen werden, wenn man ihr die Form

$$2\cos\alpha\cos\beta\ldots\cos\eta\cos\Theta + \begin{vmatrix} 1 & -\cos\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\cos\Theta \\ -\cos\alpha & 1 & -\cos\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\beta & 1 & -\cos\gamma & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\cos\zeta & 1 & -\cos\eta \\ -\cos\Theta & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\cos\eta & 1 \end{vmatrix} = 0$$

giebt. Damit nun von dem Gesagten eine Anwendung auf die Bestimmung der orthoschematischen Funktion

$$f_{2n}(\alpha, \beta, \ldots \varepsilon, \zeta, \eta, \Theta, \alpha, \beta, \ldots \varepsilon)$$

möglich sei (ein Ausdruck durch artiosphärische Funktionen niedrigerer Ordnung), so müssen uns die bekannten Ausdrücke für die Summe je zweier successiver Orthoscheme nach einer Reihe wechselnder Additionen und Subtraktionen auf eine Summe, nicht auf einen Unterschied, des ersten und $(n+2)$-ten Orthoschems führen; deshalb muss n gerade sein, d. h. die Dimensionszahl der Sphäre muss durch 4 teilbar sein.

Für die Tetrasphäre braucht man drei Argumente α, β, γ; die Relation (2), welche sie verbindet, wird

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Das zweite Beispiel der Formel (1) in § 26 giebt

$$0 = f(\alpha, \beta, \gamma, \alpha) = f(\beta, \gamma, \alpha) + f(\alpha) f(\alpha) + f(\alpha, \beta, \gamma) - 2f(\alpha) - f(\beta) - f(\gamma) + 2,$$

oder:

$$f(\alpha, \beta, \gamma) + f(\beta, \gamma, \alpha) = -f(\alpha)^2 + 2f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) - 2,$$
$$f(\beta, \gamma, \alpha) + f(\gamma, \alpha, \beta) = -f(\beta)^2 + f(\alpha) + 2f(\beta) + f(\gamma) - 2,$$
$$f(\gamma, \alpha, \beta) + f(\alpha, \beta, \gamma) = -f(\gamma)^2 + f(\alpha) + f(\beta) + 2f(\gamma) - 2;$$

hieraus folgt:

$$2f(\alpha, \beta, \gamma) = f(\beta)^2 - (1 - f(\alpha))^2 - (1 - f(\gamma))^2 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Für die Oktasphäre braucht man fünf Argumente $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$; die Relation (2) wird:

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - \cos^2\delta - \cos^2\varepsilon + \cos^2\alpha\cos^2\gamma + \cos^2\beta\cos^2\delta + \cos^2\gamma\cos^2\varepsilon + \cos^2\delta\cos^2\alpha + \cos^2\varepsilon\cos^2\beta = 0.$$

Diese Gleichung hat das Eigentümliche, dass, wenn ihr $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ genügen, dann auch die Komplemente genügen werden. Man bemerke aber, dass $\varDelta\left(\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} - \beta\right) = -\varDelta(\alpha, \beta)$ ist. Wenn also eine Lösung für das Orthoschem taugt, so giebt die mit den Komplementen ein unmögliches Orthoschem. Um Raum zu gewinnen, lasse ich in der folgenden Formel die Trennungszeichen zwischen den Argumenten einer Funktion weg.

$$\begin{aligned} f(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\alpha\,\beta) &= (1 - f(\gamma))\, f(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon) + (1 - f(\varepsilon))\, f(\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\alpha\,\beta) \\ &+ f(\delta) f(\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\alpha) - \tfrac{1}{2} f(\alpha\,\beta\,\gamma)^2 - \tfrac{1}{2} f(\varepsilon\,\alpha\,\beta)^2 - \tfrac{1}{2} f(\gamma\,\delta\,\varepsilon)^2 \\ &+ \tfrac{1}{2} f(\beta\,\gamma\,\delta)^2 + \tfrac{1}{2} f(\delta\,\varepsilon\,\alpha)^2 + (f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma))\, f(\alpha\,\beta\,\gamma) \\ &+ (f(\varepsilon) + f(\alpha) + f(\beta))\, f(\varepsilon\,\alpha\,\beta) + (f(\gamma) + f(\varepsilon))\, f(\gamma\,\delta\,\varepsilon) \\ &- f(\delta)\,(f(\beta\,\gamma\,\delta) + f(\delta\,\varepsilon\,\alpha)) + f(\gamma) f(\varepsilon)\,(f(\alpha) + f(\beta)) - 2f(\alpha\,\beta\,\gamma) \\ &- 2f(\varepsilon\,\alpha\,\beta) - 2f(\gamma\,\delta\,\varepsilon) + f(\delta)^2 - (f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(\varepsilon))^2 \\ &+ 5\,(f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(\varepsilon)) - 7. \end{aligned}$$

Setzt man alle fünf Argumente einander gleich, so wird die einzig mögliche Lösung $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{5}}\right)$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arctang} 2$; der Ausdruck für die oktosphärische Funktion reduziert sich auf

$$f_8 = -f_2 f_6 - \tfrac{1}{2} f_4^2 + 2f_6 + 6 f_2 f_4 + 2 f_2^3 - 6 f_4 - 15 f_2^2 + 20 f_2 - 7.$$

II. Sollten in der Periode der $2n$-sphärischen Funktionen zwei successive verkehrt zusammenfallen, z. B. die erste und die zweite, so muss das $2n$-te Argument dem ersten, das $(2n-1)$-te dem zweiten, u. s. f., endlich das $(n+1)$-te dem n-ten gleich sein.

Die Argumente seien demnach $\beta, \gamma, \ldots \eta, \Theta, \Theta, \eta, \ldots \gamma, \beta$. Dem ersten β gehe α voran. Es müssen dann die zwei Gleichungen

$$\Delta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots \eta, \Theta, \Theta, \eta, \ldots \gamma) = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$
$$\Delta(\beta, \gamma, \ldots \eta, \Theta, \Theta, \eta, \zeta, \ldots \gamma, \beta) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

erfüllt sein. Wird die erste so geschrieben

$$\Delta(\gamma, \delta, \ldots \eta, \Theta, \Theta, \eta, \ldots \beta, \alpha) = 0,$$

so ist sie gerade die dritte Bedingungsgleichung. Es bleiben also nur **zwei** Bedingungen zu erfüllen; und das $(2n+1)$-te und $(2n+2)$-te Argument sind einander gleich. Man hat also im ganzen nur $n+1$ verschiedene Argumente $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \zeta, \eta, \Theta$, wovon zwei, z. B. α und Θ, in Funktion der $n-1$ übrigen $\beta, \gamma, \ldots \zeta, \eta$ bestimmt sind. Die Gleichung (6) wird nach (1)

$$\Delta(\beta, \gamma, \ldots \eta, \Theta)\, \Delta(\eta, \zeta, \ldots \gamma, \beta) - \cos^2\Theta\, \Delta(\beta, \gamma, \ldots \eta)\, \Delta(\zeta, \ldots \gamma, \beta)$$
$$= \Delta(\beta, \gamma, \ldots \zeta, \eta) \left\{ \Delta(\beta, \gamma, \ldots \zeta, \eta) - 2\cos^2\Theta\, \Delta(\beta, \gamma, \ldots \zeta) \right\} = 0;$$

also

$$\cos^2\Theta = \frac{\Delta(\beta, \gamma, \ldots \zeta, \eta)}{2\,\Delta(\beta, \gamma, \ldots \zeta)}, \quad -\cos 2\Theta = \cos^2\eta\, \frac{\Delta(\beta, \gamma, \ldots \varepsilon)}{\Delta(\beta, \gamma, \ldots \varepsilon, \zeta)},$$

und hiernach durch blosse Umkehrung der Argumentenreihe

$$\cos^2\alpha = \frac{\Delta(\beta, \gamma, \ldots \zeta, \eta)}{2\,\Delta(\gamma, \ldots \zeta, \eta)}, \quad -\cos 2\alpha = \cos^2\beta\, \frac{\Delta(\delta, \ldots \zeta, \eta)}{\Delta(\gamma, \delta, \ldots \zeta, \eta)},$$

was man auch auf einem etwas längeren Wege durch Substitution des schon gefundenen Θ in der Gleichung (5) erhält.

Für die Tetrasphäre ist die Periode der Argumente $\alpha\, \beta\, \gamma\, \gamma\, \beta\, \alpha$; die Bedingungen sind $-\cos 2\alpha = -\cos 2\gamma = \cos^2\beta$, also $\alpha = \gamma$, und die Periode $\alpha\, \beta\, \alpha\, \alpha\, \beta\, \alpha$ ist nur ein besonderer Fall der schon oben behandelten Periode $\alpha\, \beta\, \gamma\, \alpha\, \beta\, \gamma$, für welche die Gleichungen (3) und (4) bestehen.

Für die Hexasphäre ist die Periode der Argumente $\alpha\, \beta\, \gamma\, \delta\, \delta\, \gamma\, \beta\, \alpha$; die Bedingungen sind

$$-\cos 2\alpha = \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\gamma}, \quad -\cos 2\delta = \frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\beta};$$

unter diesen ist:

$$f(\beta\gamma\delta\delta\gamma) = -f(\beta)f(\beta\gamma\delta) + f(\beta\gamma\delta) + f(\gamma\delta\delta) + f(\beta)f(\delta)$$
$$+ \frac{1}{2}\big(f(\beta) + f(\gamma)\big)^2 - 2\big(f(\beta) + f(\gamma) + f(\delta)\big) + \frac{5}{2},$$
$$f(\alpha\beta\gamma\delta\delta) = -f(\alpha)f(\gamma\delta\delta) + f(\beta)f(\beta\gamma\delta) - f(\gamma)f(\alpha\beta\gamma)$$
$$+ f(\alpha\beta\gamma) + f(\gamma\delta\delta) + 2f(\alpha)f(\delta) + (f(\alpha)f(\gamma) - \frac{1}{2}f(\beta)^2 + \frac{1}{2}f(\gamma)^2$$
$$- 2f(\alpha) - 2f(\gamma) - 2f(\delta) + \frac{5}{2};$$

die Ausdrücke für die zwei noch übrigen Orthoscheme ergeben sich aus diesen durch Vertauschung von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit $\delta, \gamma, \beta, \alpha$.

Sind alle Argumente einander gleich, so folgt aus $-\cos 2\alpha = \operatorname{cotg}^2\alpha$ die Formel $\cos 2\alpha = 1 - \sqrt{2}$ oder $\cos\alpha = 1 : 2\cos\frac{\pi}{8}$, und man hat

$$f_6 = -f_2 f_4 + 2f_4 + 3f_2^2 - 6f_2 + \frac{5}{2}.$$

Für die Octosphäre sei die Periode der Argumente $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\,\varepsilon\,\varepsilon\,\delta\,\gamma\,\beta\,\alpha$,

$$-\cos 2\alpha = \frac{\cos^2\beta\sin^2\delta}{\sin^2\gamma - \cos^2\delta}, \qquad -\cos 2\varepsilon = \frac{\sin^2\beta\cos^2\delta}{\sin^2\beta - \cos^2\gamma}.$$

Man findet dann zunächst einen Ausdruck für $f(\beta\gamma\delta\varepsilon\varepsilon\delta\gamma)$ und aus diesem Ausdrucke für $f(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varepsilon\delta)$ und $f(\alpha\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varepsilon)$, von denen ich nur den letzten, der sich durch Symmetrie auszeichnet, hersetzen will:

$$f(\alpha\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varepsilon) = -f(\delta)f(\alpha\alpha\beta\gamma\delta) - f(\beta)f(\beta\gamma\delta\varepsilon\varepsilon) + f(\gamma)f(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)$$
$$- f(\alpha\alpha\beta)f(\delta\varepsilon\varepsilon) + f(\alpha\beta\gamma)f(\gamma\delta\varepsilon) - \frac{1}{2}f(\beta\gamma\delta)^2 + f(\alpha\alpha\beta\gamma\delta) + f(\beta\gamma\delta\varepsilon\varepsilon)$$
$$+ f(\alpha\alpha\beta)\big(2f(\varepsilon) + f(\delta)\big) + f(\delta\varepsilon\varepsilon)\big(2f(\alpha) + f(\beta)\big) + f(\beta\gamma\delta)\big(f(\beta) + f(\delta)\big)$$
$$- f(\gamma)\big(f(\alpha\beta\gamma) + f(\gamma\delta\varepsilon)\big) + f(\alpha)f(\delta)^2 + f(\varepsilon)f(\beta)^2 - 2f(\alpha\alpha\beta) - 2f(\delta\varepsilon\varepsilon)$$
$$- 2f(\beta\gamma\delta) - 4f(\alpha)f(\varepsilon) - 4f(\alpha)f(\delta) - 4f(\varepsilon)f(\beta) + f(\gamma)^2$$
$$- \big(f(\beta) + f(\delta)\big)^2 - 5\big(f(\alpha) + f(\varepsilon) + f(\beta) + f(\delta)\big) - 7.$$

III. Wir betrachten noch den Fall besonders, wo alle Argumente einander gleich sind. Bedeutet α das Argument, so hat man

$$A_n = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4\cos^2\alpha}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4\cos^2\alpha}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{1 - 4\cos^2\alpha}},$$

und, wenn man $\cos\alpha = \frac{1}{2\cos\Theta}$ setzt,

$$\Delta_n = \frac{\sin(n+1)\Theta}{(2\cos\Theta)^n \sin\Theta}.$$

Sollen $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \ldots \Delta_{n-1}$ sämtlich positiv, aber $\Delta_n = 0$ sein, so ist $\Theta = \frac{\pi}{n+1}$ die einzig mögliche Lösung

Für ein verschwindendes Θ ist

$$\Delta_n = \frac{n+1}{2^n}, \qquad \alpha = \frac{\pi}{3};$$

also

$$\Delta_{n+1}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \cdots \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{n+1}{2^n} - \cos^2\frac{\pi}{4}\cdot\frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n},$$

$$\Delta_{n+2}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \cdots \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2^n} - \cos^2\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2^{n-1}} = 0.$$

§ 29. *Ueber das Orthoschem* $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \cdots \frac{\pi}{3}, \alpha, 2\alpha, \alpha, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \cdots \frac{\pi}{3}\right)$.

Satz. Wenn das m-te Argument eines n-sphärischen Orthoschems 2α, das vorhergehende und nachfolgende α, alle übrigen aber $\frac{\pi}{3}$ sind, so ist das Orthoschem $\binom{n}{m}$ mal so gross, wie wenn sein erstes Argument α und alle übrigen $\frac{\pi}{3}$ sind.

Beweis. Setzt man $f(1\,2\,3 \ldots m\,(m+1) \ldots n) = f_n^m(\alpha)$, wenn $(1\,2) = (2\,3) = (3\,4) = \cdots = ((m-2)\,(m-1)) = \frac{\pi}{3}$, $((m-1)\,m) = \alpha$, $(m\,(m+1)) = 2\alpha$, $((m+1)\,(m+2)) = \alpha$, $((m+3)\,(m+4)) = ((m+4)\,(m+5)) = \cdots = ((n-1)\,n) = \frac{\pi}{3}$ ist, und insbesondere $f\left(\alpha, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \cdots \frac{\pi}{3}\right) = f_n^0(\alpha)$, $f\left(2\alpha, \alpha, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \cdots \frac{\pi}{3}\right) = f_n^1(\alpha)$, so hat man zunächst

$$f_n^{n-m}(\alpha) = f_n^m(\alpha),$$

weil die Ordnung der Grenzpolynome eines Orthoschems auch umgekehrt werden darf. Wenn ferner der Kürze wegen

$$\cos a = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}$$

gesetzt wird, so findet man leicht

$$f\left(\overline{(m-1)\,m},\ 1\,2\,3\ldots(m-2)\,(m+1)\,(m+2)\ldots n\right)=f_{n-2}^{m-2}(\alpha),$$
$$f\left(\overline{m\,(m+1)},\ 1\,2\,3\ldots(m-1)\,(m+2)\,(m+3)\ldots n\right)=f_{n-2}^{m-1}(\alpha),$$
$$f\left(\overline{(m+1)\,(m+2)},\ 1\,2\,3\ldots m\,(m+3)\,(m+4)\ldots n\right)=f_{n-2}^{m}(\alpha);$$

und hieraus

$$d f_n^m(\alpha)=\left\{f_{n-2}^{m-2}(\alpha)+2 f_{n-2}^{m-1}(\alpha)+f_{n-2}^{m}(\alpha)\right\} d f(\alpha). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Für $n=m$ ist $f_m^m(\alpha)=f_m^0(\alpha)$; für $n=m+1$ ist $f_{m+1}^m(\alpha)=f_{m+1}^1(\alpha)$; wir müssen also zuerst $f_n^1(\alpha)$ zu reduzieren trachten. Die Gleichung (1) giebt

$$d f_n^1(\alpha)=\left\{2 f_{n-2}^0(\alpha)+f_{n-2}^1(\alpha)\right\} d f(\alpha). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Für $n=3$ ist $f_3'(\alpha)=f(2\alpha)+f(\alpha)-1=3 f(\alpha)-1$, hingegen $f_3^0(\alpha)=f(\alpha)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)-1=f(\alpha)-\frac{1}{3}$; also

$$f_3^1(\alpha)=3 f_3^0(\alpha).$$

Für $n=4$ ist $d f_4^1(\alpha)=\left\{2 f(\alpha)+f(2\alpha)\right\} d f(\alpha)=4 f(\alpha)\, d f(\alpha)$; weil aber $d f_4^0(\alpha)=f(\alpha)\, d f(\alpha)$ ist, so folgt hieraus

$$f_4^1(\alpha)=4 f_4^0(\alpha).$$

Wäre nun der Satz

$$f_m^1(\alpha)=m f_m^0(\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

für $m=n-2$ schon bewiesen, so würde aus (2) folgen $d f_n^1(\alpha)=n f_{n-2}^0(\alpha)\, d f(\alpha)=n\, d f_n^0(\alpha)$, und hieraus durch Integration

$$f_n^1(\alpha)=n f_n^0(\alpha).$$

Da aber die Gleichung (3) für $m=3$ und $m=4$ schon bewiesen ist, so gilt sie allgemein.

Wir kommen jetzt zur Gleichung (1) zurück. Wäre der Satz

$$f_i^m(\alpha)=\binom{i}{m} f_i^0(\alpha)$$

für $i=n-2$ schon zugegeben, so würde aus der Gleichung (1) folgen

$$d f_n^m(\alpha) = \left\{\binom{n-2}{m-2} + 2\binom{n-2}{m-1} + \binom{n-2}{m}\right\} d f_n^0(\alpha),$$

also durch Integration

$$f_n^m(\alpha) = \binom{n}{m} f_n^0(\alpha),$$

d. h. der vorige Satz würde auch für $i = n$ gelten. Nach dem frühern ist aber wirklich

$$f_m^m(\alpha) = f_m^0(\alpha) = \binom{m}{m} f_m^0(\alpha),\ f_{m+1}^m(\alpha) = f_{m+1}^1(\alpha) = \binom{m+1}{m} f_{m+1}^0(\alpha),$$

d. h. der fragliche Satz gilt für $i = m$ und $i = m+1$. Also gilt er überhaupt.

Wir machen nun von dem bewiesenen Satz folgende spezielle Anwendungen.

1. Fall, wo $\alpha = \frac{\pi}{3}$. — Es ist nach dem vorigen Satz $f_n^1\left(\frac{\pi}{3}\right) = n f_n^0\left(\frac{\pi}{3}\right)$; da aber in beiden Orthoschemen die ersten Argumente $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{3}$, also supplementär sind, alle folgenden hingegen übereinstimmen, so ist nach dem am Ende von § 23 Gesagten

$$f_n^1\left(\frac{\pi}{3}\right) + f_n^0\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 f_n^0\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 f_{n-1}^0\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

oder

$$f_n^0\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{n+1} f_{n-1}^0\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

und, da $f_2^0\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2}$ ist, endlich

$$f_n\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \ldots \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n+1)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

2. Fall, wo $\alpha = \frac{\pi}{4}$. — Es ist $f_n^1\left(\frac{\pi}{4}\right) = n f_n^0\left(\frac{\pi}{4}\right)$ und nach § 23 zugleich $f_n\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \ldots \frac{\pi}{3}\right) = f_{n-1}^0\left(\frac{\pi}{4}\right)$; also $f_n^0\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{n} f_{n-1}^0\left(\frac{\pi}{4}\right)$, und da $f_2^0\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ ist, allgemein

$$f_n\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \ldots \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Wenn man rechte Argumente ausschliesst, so sind, für alle Dimensionszahlen über 4, die Formeln (4) und (5) wahrscheinlich die **einzigen**, worin sowohl alle Argumente mit dem Kreisumfang kommensurabel, als auch die Werte der orthoschematischen Funktionen rationale Zahlen sind. Der Beweis hiervon scheint mir aber sehr schwer. Die

genannten Formeln sind übrigens leicht mittelst der regulären Polyscheme der n-fachen Totalität zu verifizieren, indem man dieselben auf eine konzentrische Sphäre projiziert. Bei der regulären Pyramide zerfällt dann das sphärische Kontinuum in $n+1$ reguläre Plagioscheme, deren jedes alle seine Argumente gleich $\frac{2\pi}{3}$ hat, und daher in $1.2.3\ldots n$ gleiche Orthoscheme $S_n\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \ldots \frac{\pi}{3}\right)$ zerfällt. Dadurch ist die Formel (4) verifiziert. Beim Reciprok-Paralleloschem (3, 3, 3, ... 3, 4) wird das sphärische Kontinuum in 2^n reguläre Plagioscheme mit dem gemeinschaftlichen Wert $\frac{\pi}{2}$ aller Argumente geteilt; jedes entspricht also gerade der Einheit der sphärischen Funktion, und da es nun in $1.2.3\ldots n$ gleiche Orthoscheme $S_n\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \ldots \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$ zerfällt, so ist hierdurch auch die Formel (5) verifiziert.

Auch bei der Tetrasphäre weiss ich keine solche Formeln mit kommensurabeln Argumenten und rationalem Funktionswert anzugeben, die nicht mit den regulären Polyschemen der vierfachen Totalität im Zusammenhang wären. Da für diese Dimensionszahl die grösste Mannigfaltigkeit stattfindet, so ist ihr der folgende Paragraph eigens gewidmet.

§ 30. *Rationale tetrasphärische Orthoscheme, deren Argumente rationale Teile von π sind.*

Aus den allgemeinen Formeln (4) und (5) des vorigen Paragraphen folgen sogleich:

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{15}, \ (1) \qquad f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{24}. \quad \ldots \quad (2)$$

Die für die Periode $\alpha\,\beta\,\gamma\,\alpha\,\beta\,\gamma$ bei der Tetrasphäre in § 28 gefundene Bedingungsgleichung (3), $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, hat, abgesehen von Permutationen, nur zwei rationale Lösungen: $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ und $\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right)$. Jene giebt ausser (2) noch

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{72}; \quad \ldots \quad (3)$$

diese giebt

$$f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{225}, \quad \ldots \quad (4)$$

$$f\left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{45}, \quad \ldots \quad (5)$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right) = \frac{19}{225}. \quad \ldots \quad (6)$$

Da nach § 23 die Gleichung

$$f\left(\frac{4\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) = 2 f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{14}{15}$$

stattfindet, so folgt aus (6):

$$f\left(\frac{4\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{191}{225} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Durch Anwendung von § 29 ergeben sich aus (4) und (7) die Formeln

$$f\left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{900}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{191}{900}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$f\left(\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{150}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{191}{150}.$$

Nimmt man im letzten Orthoschem das zweite Polynom entgegengesetzt, so erhält man

$$f\left(\frac{3\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{8}{5} - \frac{191}{150} = \frac{49}{150};$$

nimmt man hier wieder das erste Polynom entgegengesetzt, so erhält man

$$f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{11}{150}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Mit Weglassung von (7) hat man also im ganzen 10 kommensurable tetrasphärische Orthoscheme mit kommensurabeln, im ersten Quadranten befindlichen Argumenten. Ich zweifle sehr, ob es ausser diesen noch andere gäbe, und diese stehen alle mit den regulären Polyschemen (3, 3, 3), (3, 3, 4), (3, 3, 5), (3, 4, 3) im Zusammenhang. Wendet man die in § 27 gezeigte Periodenbildung auf die vorliegenden Funktionswerte an, um daraus neue zu finden, so bekommen diese inkommensurable Argumente.

Um überhaupt keinen Fall zu verschweigen, wo orthoschematische Funktionen finite Ausdrücke haben, wollen wir auch noch mit der Periodenbildung zunächst an der Tetrasphäre das Mögliche versuchen.

Setzt man $\frac{\pi^2}{4}\, d f(\alpha, \beta, \gamma) = a\, d\alpha + b\, d\beta + c\, d\gamma$, so ist

$$\cos a = \frac{\sin\alpha\cos\gamma}{\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}}, \quad \cos b = \frac{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}\sqrt{\sin^2\beta - \cos^2\gamma}}, \quad \cos c = -\frac{\cos\alpha\sin\gamma}{\sqrt{\sin^2\beta - \cos^2\gamma}}.$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit den Relationen (6) und (7) in § 27, so ergiebt sich die Periode $\alpha, \beta, \gamma, \frac{\pi}{2} - a, b, \frac{\pi}{2} - c$. Demnach sind oben schon Perioden mit lauter kommensurabeln Gliedern vorgekommen, nämlich: 1. $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$, wohin die Formeln (2) und (3) gehören; 2. $\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}$, wohin (4), (5) und (6), und 3. $\frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}$, wohin (10) und (11) gehören. Die Argumente in (1) und (8) geben dagegen Perioden, worin inkommensurable Glieder sich finden; wird $\cos 2\lambda = \frac{1}{4}$ gesetzt, so sind sie: $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \lambda, 2\lambda, \lambda$ und $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3} - \lambda, \frac{2\pi}{3} - \lambda$; man erhält daraus die neuen Funktionswerte:

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \lambda\right) = -\frac{2}{15} + \frac{1}{3}\frac{2\lambda}{\pi},\; f\left(\frac{\pi}{3}, \lambda, 2\lambda\right) = -\frac{8}{15} + \frac{4}{3}\cdot\frac{2\lambda}{\pi},\; f(\lambda, 2\lambda, \lambda) = -\frac{4}{5} + 2\cdot\frac{2\lambda}{\pi};$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3} - \lambda\right) = \frac{43}{300} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2\lambda}{\pi},$$
$$f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, -\lambda, \frac{2\pi}{3} - \lambda\right) = \frac{391}{900} - \frac{2\lambda}{\pi},$$
$$f\left(\frac{\pi}{3} - \lambda, \frac{2\pi}{3} - \lambda, \frac{\pi}{5}\right) = \frac{401}{900} - \frac{2\lambda}{\pi},$$
$$f\left(\frac{2\pi}{3} - \lambda, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{53}{300} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2\lambda}{\pi}.$$

§ 31. Ueber das Orthoschem $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \dots \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \alpha, \alpha, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \dots \frac{\pi}{3}\right)$ und einige mit diesem und dem in § 29 betrachteten in Beziehung stehende Sätze.

Satz. Wenn in einer n-sphärischen orthoschematischen Funktion das $(m-1)$-te, m-te, $(m+1)$-te und $(m+2)$-te Argument der Reihe nach $\frac{\pi}{4}, \alpha, \alpha, \frac{\pi}{4}$, alle übrigen aber $\frac{\pi}{3}$ sind, so ist die Funktion $\binom{n-1}{m}$ mal so gross, wie wenn das erste Argument α, das zweite $\frac{\pi}{4}$ und alle folgenden $\frac{\pi}{3}$ sind.

Beweis. Wird die zuerst genannte Funktion mit $g_n^m(\alpha)$ bezeichnet, so muss folgerecht die zweite durch $g_n^0(\alpha)$ dargestellt werden. Setzt man

$$\cos a = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2(2\sin^2 \alpha - 1)}}$$

und lässt $f_n^m(\alpha)$ dasselbe bedeuten wie in § 29, so findet man

$$d\, g_n^m(\alpha) = \left\{ f_{n-2}^{m-1}(\alpha) + f_{n-2}^m(\alpha) \right\} d\, f(\alpha),$$

also nach dem Satz des angeführten Paragraphen

$$d\, g_n^m(\alpha) = \left\{ \binom{n-2}{m-1} + \binom{n-2}{m} \right\} f_{n-2}^0(\alpha)\, d\, f(\alpha) = \binom{n-1}{m} f_{n-2}^0(\alpha)\, d\, f(\alpha),$$

oder, da $d\, g_n^0(\alpha) = f_{n-2}^0(\alpha)\, d\, f(\alpha)$ ist, durch Integration

$$g_n^m(\alpha) = \binom{n-1}{m} g_n^0(\alpha),$$

was zu beweisen war

Die in § 30 behandelten Perioden $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}$ arc cos $\left(\frac{1}{4}\right)$, arc cos $\left(\frac{1}{4}\right)$, $\frac{1}{2}$ arc cos $\left(\frac{1}{4}\right)$ sind besondere Fälle zweier allgemeiner Perioden, welche so definiert werden:

1. Folgen $n-1$ Argumente, deren jedes gleich $\frac{\pi}{3}$ ist, auf einander, und man setzt $\cos 2\lambda = \frac{1}{n}$, so werden jene Argumente durch die drei darauf folgenden $\lambda, 2\lambda, \lambda$ zur Periode ergänzt.

2. Folgen $n-2$ Argumente $\frac{\pi}{3}$ und eines $\frac{\pi}{4}$ auf einander, und man setzt $\cos \mu = \sqrt{\frac{1}{n}}$, so werden jene Argumente durch $\mu, \mu, \frac{\pi}{4}$ zur Periode ergänzt.

Die Beweise hierfür sind aus § 28, III und § 27, (6) und (7) zu entnehmen.

Zur Bestimmung der Funktionen, welche diesen Perioden entsprechen, führen ausser dem Satz von § 29 und dem ersten dieses Paragraphen folgende Sätze.

I. Sind alle Argumente eines n-sphärischen Plagioschems 2α, dasselbe also regulär, so zerfällt es von seinem sphärischen Centrum aus in $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n$ Orthoscheme, deren jedes als erstes Argument α und die $n-2$ folgenden gleich $\frac{\pi}{3}$ hat und daher der Funktion $f_n^0(\alpha)$ entspricht.

Wird nun hierauf die Gleichung (1) des § 24 angewandt, so sind die dortigen

f_{2n+1} durch $(2n+1)!\, f_{2n+1}^0(\alpha)$
Σf_{2n-2i} „ $\binom{2n+1}{2n-2i} (2n-2i)!\, f_{2n-2i}^0(\alpha)$

zu ersetzen, wodurch man erhält

$$f^0_{2n+1}(\alpha) = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i A_i f^0_{2n-2i}(\alpha),$$

wenn die Koeffizienten A durch tang $x = \Sigma A_i x^{2i+1}$ definiert sind. Wenn also $\cos 2\lambda = \frac{1}{2n}$ ist, so hat man

$$f^0_{2n}(\lambda) = A_1 f^0_{2n-2}(\lambda) - A_2 f^0_{2n-4}(\lambda) + \cdots - (-1)^n A_n.$$

II. Sind die Stücke eines n-sphärischen regulären Polyschems nach dem Charakter $(3, 3 \ldots 3, 4)$ geordnet und alle Winkel zwischen je zwei angrenzenden Perischemen 2α, so zerfällt dasselbe von seinem sphärischen Centrum aus in 2^{n-1} congruente Plagioscheme; von den n Perischemen eines solchen bildet eines (die Basis) mit allen übrigen das Argument a, während je zwei von diesen zu einander orthogonal sind. Ein solches Plagioschem zerfällt daher von seiner Spitze aus in $(n-1)!$ Orthoscheme, bei deren jedem die zwei ersten Argumente α, $\frac{\pi}{4}$, die $n-3$ folgenden sämtlich $\frac{\pi}{3}$ sind. Das erwähnte Plagioschem, durch die n-sphärische Einheit gemessen, beträgt also

$$(n-1)!\; g^0_n(\alpha).$$

Wird nun hierauf der Satz des § 24 angewandt, so hat man

$$\begin{aligned} f_{2n+1} &= (2n)!\, g^0_{2n+1}(\alpha), \\ \Sigma f_{2n-2i} &= \binom{2n}{2n-2i-1}(2n-2i-1)!\, g^0_{2n-2i}(\alpha) + \binom{2n}{2n-2i} \\ &= \frac{(2n)!}{(2i+1)!} g^0_{2n-2i}(\alpha) + \binom{2n}{2i} \end{aligned}$$

zu setzen, und man erhält

$$g^0_{2n+1}(\alpha) = \sum_{i=0}^{i=n-1} (-1)^i A_i g^0_{2n-2i}(\alpha) + (-1)^n C_n,$$

wenn die Koeffizienten A und C durch die Gleichungen

$$\text{tang}\, x = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n x^{2n+1}, \qquad \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n x^{2n}$$

definiert sind.

Ist $\cos \mu = \sqrt{\frac{1}{2n}}$, so hat man

$$g^0_{2n}(\mu) = A_1 g^0_{2n-2}(\mu) - A_2 g^0_{2n-4}(\mu) + \cdots - (-1)^n C_n.$$

Für $n = 2$ wird $\mu = \frac{\pi}{3}$; also, da $A_1 = \frac{1}{3}$, $C_2 = \frac{5}{24}$ ist,

$$g_1^0\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3} f\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{5}{24} = \frac{1}{72},$$

was mit der Formel (3) in § 30 übereinstimmt.

§ 32. *Ueber sphärische Perischeme.*

Wir haben bisher nur solche Integrale $\int^n dx\,dy\,dz\ldots, (x^2+y^2+\cdots<1, p_1>0, p_1>0,\ldots)$ betrachtet, wo die Zahl der Grenzpolynome p der Dimensionszahl n gleich war. Es liegt uns also noch die Untersuchung der zwei Fälle ob, wo jene Zahl der homogenen Grenzpolynome kleiner oder grösser als n ist.

Der erste Fall bietet gar keine Schwierigkeit dar. Sind nämlich nur $n-m$ homogene und lineare Polynome $p_1, p_2, \ldots p_{n-m}$ mit n Variabeln gegeben, welche das Integral

$$\int^n dx\,dy\,dz\ldots \binom{x^2+y^2+\cdots<1}{p_1>0,\ p_2>0,\ldots p_{n-m}>0} = f_n(p_1, p_2, \ldots p_{n-m}) \cdot \int^n dx\,dy\,dz\ldots \binom{x^2+y^2+\cdots<1}{x>0,\ y>0,\ldots}$$

begrenzen, so braucht man nur die Variabeln orthogonal so zu transformieren, dass die gegebenen Grenzpolynome nur $n-m$ derselben enthalten, und dann das in § 23 gezeigte Verfahren anzuwenden, um

$$f_n(p_1, p_2, \ldots p_{n-m}) = 2^m \cdot f_{n-m}(p_1, p_2, \ldots p_{n-m})$$

zu bekommen, wodurch das vorgelegte n-fache Integral mit bloss $n-m$ Grenzpolynomen auf eine $(n-m)$-sphärische plagioschematische Funktion zurückgeführt ist.

Im zweiten Fall, wo die Zahl der Grenzpolynome des n-fachen Integrals die Dimensionszahl n übertrifft, nennen wir das entsprechende Stück des n-sphärischen Kontinuums ein n-sphärisches Polyschem und denken uns die Anordnung seiner Perischeme in ähnlicher Weise gegeben wie bei einem linearen Polyschem der $(n-1)$-fachen Totalität. Wie nun dieses nach § 11 in lauter Pyramiden (n-Scheme) zerlegt werden kann, welche eine gegebene (innere) Lösung zur gemeinschaftlichen Spitze haben, gerade so kann auch jedes n-sphärische Polyschem in lauter Plagioscheme zerlegt werden.

Wenden wir jetzt § 22 an, um das Differential der n-sphärischen polyschematischen Funktion zu bestimmen, und messen der grössern Einfachheit wegen alle vorkommenden

Argumente oder Winkel je zweier Polynome durch den Quadranten, und die $(n-2)$-sphärischen Perischeme durch das $(n-2)$-sphärische Orthoschem mit lauter rechten Argumenten, so bekommen wir ein Aggregat von Produkten je eines plagioschematischen $(n-2)$-sphärischen Perischems und des Differentials des entsprechenden Arguments. Von den Grenzpolynomen jedes durch die Teilung entstandenen Plagioschems ist eines (p) mit dem gegebenen Polyschem gemein; die übrigen (q) scheiden dasselbe von den angrenzenden Plagioschemen; unter seinen $(n-2)$-sphärischen Perischemen können wir daher innere, welche je zwei Gleichungen, wie $q=0$, $q'=0$, und äussere, welche je zwei Gleichungen, wie $p=0$, $q=0$, entsprechen, unterscheiden. Die innern Perischeme sind dreien oder mehreren Polynomen q, worunter nur zwei unabhängige sind, gemein, weshalb die Summe der entsprechenden Argumente, wie z. B.

$$\angle(q, -q') + \angle(q', -q'') + \angle(q'', -q''') + \angle(q''', -q),$$

immer $= 4$, und daher die Summe ihrer Differentiale gleich Null ist, so dass die betreffenden Glieder des Aggregats sich aufheben. Einem äussern Perischem $(p=0,\ q=0)$ entsprechen entweder zwei supplementäre Argumente $\angle(p, q)$ und $\angle(p, -q)$, deren Summe 2, das Differential also 0 ist, so dass die entsprechenden Glieder des Aggregats sich aufheben; oder, wenn q nur von zwei Polynomen p, p' abhängt, so entsprechen demselben äussern Perischem die Argumente $\angle(p, q)$ und $\angle(-q, p')$, deren Summe $\angle(p, p')$ ein Argument des gegebenen Polyschems ist. Denkt man sich die betreffende Reduktion des Aggregats vollzogen, so wird man im allgemeinen mehrere Produkte finden, welche dasselbe Differential eines Arguments des Polyschems zum Faktor haben, und dann wird die Summe der andern Faktoren ein ganzes $(n-2)$-sphärisches Perischem des gegebenen Polyschems sein, indem mehrere durch die Teilung entstandene plagioschematische Perischeme sich zu einem polyschematischen zusammensetzen. Eine solche Zusammensetzung findet indes erst für $n \overline{\overline{>}} 5$ statt. Diese Andeutungen, welche zur Vermeidung von Weitläufigkeit die Stelle eines vollständigen Beweises ersetzen sollen, berechtigen zu dem Schlusse:

Das vollständige Differential eines n-sphärischen Polyschems ist gleich der Summe der Produkte aller seiner $(n-2)$-sphärischen Perischeme mit den Differentialen der entsprechenden Argumente.

Wären nun die Argumente wirklich alle unter sich unabhängig, so könnte man die $(n-2)$-sphärischen Perischeme als partielle Differentialkoeffizienten des n-sphärischen Polyschems betrachten. Dies gilt indes nur für die Tetrasphäre. Für die Trisphäre ist die Zahl der Argumente zu klein, für $n > 4$ ist sie zu gross.

Ist nämlich m die Zahl der Winkel eines Kugelvielecks, so ist bekanntlich $2m-3$ die Zahl seiner wesentlichen Bestimmungsstücke. Ueberhaupt ist die Zahl der wesent-

lichen Data eines n-sphärischen Polyschems derjenigen für ein lineares Polyschem der $(n-1)$-fachen Totalität gleich, wenn die Anordnung der Perischeme bei beiden übereinstimmt. Wir wollen daher diese letzte Zahl zu berechnen suchen.

Ist g die Zahl aller $(n-1)$-fachen linearen Kontinuen, welche ein Polyschem der n-fachen Totalität begrenzen, und gehen h derselben durch ein erstes Eck, h' durch ein anderes, h'' durch ein drittes, u. s. f.; so sind von den h Polynomen, welche dem ersten Eck entsprechen, $h-n$ von den übrigen abhängig, was für $h-n$ Bedingungen zählt, u. s. f. Man wird sich bald überzeugen, dass keine von diesen Bedingungen überflüssig ist, und dass alle zusammen gerade hinreichen, um die Anordnung der Teile des Polyschems auszudrücken. Da nun n die Zahl der wesentlichen Elemente einer linearen Gleichung mit n Variabeln, und $\frac{1}{2}n(n+1)$ die Zahl der Data ist, durch welche irgend ein orthogonales System der Variabeln bestimmt wird, so bekommen wir

$$ng-(h-n)-(h'-n)-(h''-n)-\text{etc.}-\frac{1}{2}n(n+1)$$

als Zahl der wesentlichen Data des Polyschems, d. h.:

Die Zahl der Bestimmungsstücke eines linearen Polyschems der n-fachen Totalität ist gleich der n-fachen Summe der Zahl aller $(n-1)$-fachen Perischeme und derjenigen aller Ecken, vermindert um die Summe der Eckenzahlen eines jeden $(n-1)$-fachen Perischems und um $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Wenn für $n=3$ die Zahlen der Ecken, Kanten und Vielecke eines Polyeders mit a_0, a_1, a_2 bezeichnet werden, so ist die Eckenzahl jedes Perischems oder Vielecks seiner Seitenzahl gleich, die Summe dieser Zahlen also auch gleich der Summe der Zahlen der durch jede Kante gehenden Perischeme, d. h. gleich $2a_1$; demnach ist die Zahl der Data des Polyeders gleich

$$3(a_0+a_2)-2a_1-6=3(a_0-a_1+a_2-2)+a_1=a_1.$$

Es folgt hieraus, dass ein räumliches Polyeder durch seine Kanten gerade bestimmt ist, ebenso ein tetrasphärisches Polyschem durch seine Seiten oder auch durch die Argumente, welche von je zweien sphärischen Vielecken an der gemeinschaftlichen Seite eingeschlossen werden.

Denken wir uns alle Kanten eines linearen Polyschems der vierfachen Totalität gegeben, so ist nach dem vorigen jedes der polyedrischen Perischeme vollständig bestimmt. Da aber jedes Vieleck zweien Polyedern gemein ist, so sind unter seinen Winkeln die, welche die Dreizahl übersteigen, doppelt bestimmt. Beschreibt man jetzt um irgend ein Eck des gegebenen Polyschems eine Tetrasphäre, so schneidet diese die nötigenfalls verlängerten Räume der in jenem zusammentreffenden Polyeder in einem

das Eck charakterisierenden tetrasphärischen Polyschem, in dessen Umschluss bereits alle Kugelvielecke vollständig bekannt sind. Daher ist nach dem obigen auch das tetrasphärische Polyschem selbst vollständig bestimmt, namentlich seine Argumente, welche mit denen des ursprünglichen linearen Polyschems zusammenfallen. Also ist auch dieses in allen seinen Teilen wenigstens hinreichend bestimmt.

Führt man auf eine Kante desselben einen normalen Raum, so schneidet derselbe die in der Kante zusammengrenzenden polyedrischen Perischeme in einem gewöhnlichen Körperwinkel, und dieser wird durch das vorhin beschriebene Verfahren von beiden die Kante begrenzenden Ecken her zweimal bestimmt. Inwiefern aber hier doppelte Bestimmung der Stücke des genannten Körperwinkels stattfindet, bin ich nicht imstande, zu entscheiden.

Die vorige Erörterung berechtigt uns nur, zu sagen, dass ein lineares Polyschem der vierfachen Totalität durch seine Kanten immer wenigstens bestimmt ist; und wir dürfen noch beifügen, dass, wenn die zweifachen Perischeme nicht lauter Dreiecke sind, dann die Zahl der Kanten diejenige seiner wesentlichen Bestimmungsstücke gewiss übertrifft. Es ist aber sehr wahrscheinlich, dass die Gleichheit beider Zahlen nur da stattfindet, wo sie unmittelbar evident ist, beim Pentaschem, und dass hingegen bei jedem andern linearen Polyschem der vierfachen Totalität die Zahl der Kanten grösser ist als diejenige der wesentlichen Bestimmungsstücke.

In Ermangelung eines strengen Beweises kann man diesen Satz im einzelnen z. B. durch die in § 17 für die regulären Polyscheme der vierfachen Totalität gegebenen Zahlen bestätigen.

Für höhere Dimensionszahlen über 4 ist dasselbe nach einer ganz natürlichen Induktion in noch grösserem Masse zu erwarten.

Tragen wir nun diese Betrachtungen auf sphärische Polyscheme über, deren Dimensionszahl n grösser als 4 ist, indem wir zugleich nach Art der reciproken Beziehung die Ecken mit den $(n-1)$-sphärischen Perischemen, überhaupt die m-sphärischen Perischeme immer mit den $(n-m-1)$-sphärischen vertauschen, so sehen wir, dass die Zahl der $(n-2)$-sphärischen Perischeme, oder, wenn man will, der daran liegenden Argumente, nicht kleiner als die Zahl der wesentlichen Bestimmungsstücke des n-sphärischen Polyschems sein kann, und finden es wahrscheinlich, dass mit Ausnahme des Plagioschems jene Zahl immer grösser ist als diese. Während also ein tetrasphärisches Polyschem immer durch seine Argumente gerade bestimmt ist, so ist dagegen höchst wahrscheinlich von da hinweg jedes polysphärische Polyschem durch seine Argumente mehr als bestimmt.

So wie in § 24 jedes perissosphärische Plagioschem durch artiosphärische von niedrigerer Ordnung ausgedrückt ward, ohne dass man einer Berechnung neuer Argumente bedurfte, so vermute ich, dass im allgemeinen jedes perissosphärische Polyschem durch artiosphärische Polyscheme niedrigerer Ordnung, von denen keines neue Argumente

hat, wird ausgedrückt werden können, ohne dass man eine Zerfällung des gegebenen Polyschems in Plagioscheme vorzunehmen braucht. Wenn wir hierüber eine Weile näher eintreten, so nehmen wir der Einfachheit wegen auf jeder Polysphäre das Orthoschem mit lauter rechten Argumenten als Einheit des Masses an, also z. B. den Quadranten als Einheit der Winkel oder der Argumente.

Das trisphärische Polyschem oder das Kugelvieleck ist bekanntlich gleich der Summe seiner Winkel minus seine doppelte Seitenzahl plus 4. Sind $p_1, p_2, \ldots p_m$ die Grenzpolynome, welche der Reihe nach den Seiten entsprechen, so kann man diesen Satz durch die Formel

$$f_3(p_1, p_2, \ldots p_m) = f(p_1, p_2) + f(p_2, p_3) + \cdots + f(p_{m-1}, p_m) + f(p_m, p_1) - 2m + 4$$

oder kurz durch

$$f_3(p, p', p'', \ldots) = 4 - \Sigma \left\{2 - f(p, p' \text{ Eck})\right\}$$

ausdrücken.

Satz. Sind $p, p', p'', p''', \ldots$ die Grenzpolynome eines pentasphärischen Polyschems $f_5(p; p', p'', p''', p^{IV}, \ldots)$, und bezeichnet $f_4(p, p', p'', p''', \ldots \text{Eck})$ das tetrasphärische Polyschem, welches von allen ein Eck bildenden Polynomen begrenzt wird, $f(p, p' \text{ Vieleck})$ das disphärische Plagioschem oder das von zweien Polynomen p, p', welche ein im Umschluss vorhandenes sphärisches m-Eck bestimmen, eingeschlossene Argument, so ist

$$\begin{aligned} f_5(p, p', p'', p''', p^{IV}, \ldots) &= -\Sigma(8 - f_4(p, p', p'', p''', \ldots \text{Eck}) + 2\,\Sigma(m-2)(2 - f(p, p' \text{ Vieleck})) + 16 \\ &= \Sigma f_4(p, p', p'', p''', \ldots \text{Eck}) - 2\,\Sigma(m-2) f(p, p' \text{ Vieleck}) + 4\,\Sigma m - 8\,b_0 - 8\,b_2 + 16, \quad . \; . \quad (1) \end{aligned}$$

wenn b_0, b_1, b_2, b_3 die Zahlen der Ecken, Seiten, Vielecke, tetrasphärischen Perischeme des Polyschems f_5 bedeuten.

Beweis. Indem wir nach und nach vom Einfachern zum Zusammengesetztern überzugehen beabsichtigen, setzen wir zuerst ein Polyschem, begrenzt von den Polynomen $P, p, q_1, q_2, \ldots q_m$, und zwar so, dass unter den mit q bezeichneten nur 3 unabhängige sind, und alle zusammen innerhalb des trisphärischen Perischems ($P = 0$, $p = 0$) ein Kugelvieleck bilden. Man wähle innerhalb desselben eine beliebige Lösung und lege durch diese, jedes Eck des Vielecks und die zwei übrigen Ecken des Polyschems die Polynome $r_1, r_2, \ldots r_3$, welche das ganze in m Plagioscheme zerschneiden. Unter diesen Polynomen r werden dann nur zwei unabhängige sein, und r_1 wird zugleich mit q_1, q_2, ferner r_2 zugleich mit q_2, q_3, u. s. f., endlich r_m zugleich mit q_m, q_1 verschwinden. Für eines dieser Plagioscheme hat man nun z. B.

$$f_5(P,p,q_1,r_m,-r_1)=f_4(P,q_1,r_m,-r_1)+f_4(p,q_1,r_m,-r_1)$$
$$+f_4(P,p,r_m,-r_1)+f_4(P,p,q_1,r_m)+f_4(P,p,q_1,-r_1)$$
$$-2f(P,p)-2f(P,q_1)-2f(p,q_1)-2f(P,r_m)-2f(P,-r_1)$$
$$-2f(p,r_m)-2f(p,-r_1)-2f(q_1,r_m)-2f(q_1,-r_1)-2f(r_m,-r_1)+16. \qquad (2)$$

Man ersetze hier $q_1, r_m, -r_1$ durch $q_2, r_1, -r_2$, durch $q_3, r_2, -r_3$, u. s. f., endlich durch $q_m, r_{m-1}, -r_m$, und summiere. Da alsdann

$$\Sigma f_4(P,q_i,r_{i-1},-r_i)=f_4(P,q_1,q_2,\ldots q_m \text{ Eck}),$$
$$\Sigma f_4(P,p,r_{i-1},-r_i)=4f(P,p),$$
$$f_4(P,p,q_1,-r_1)+f_4(P,p,q_2,r_1)=f_4(P,p,q_1,q_2),$$
$$f(P,-r_1)+f(P,r_1)=2,$$
$$f(q_1,-r_1)+f(q_2,r_1)=f(q_1,q_2),$$
$$\Sigma f(r_{i-1},-r_i)=4$$

ist, so folgt

$$f_5(P,p,q_1,q_2,\ldots q_m)=f_4(P,q_1,q_2,\ldots q_m)+f_4(p,q_1,q_2,\ldots q_m)+\Sigma f_4(P,p,q_i,q_{i+1})$$
$$-2(m-2)f(P,p)-2\,\Sigma f(P,q_i)-2\,\Sigma f(p,q_i)-2\,\Sigma f(q_i,q_{i+1})+8m-8. \quad . \quad . \quad (3)$$

Die Polynome $p, q_1, q_2, \ldots q_m$, welche zusammen nur 4 unabhängige Variabeln repräsentieren, begrenzen für sich allein ein tetrasphärisches Polyschem, das in Beziehung auf die Anordnung seiner Stücke einer räumlichen m-seitigen Pyramide zu vergleichen ist. So wie nun im Raume jedes Polyeder von einem innern Punkte aus in lauter Pyramiden zerlegt werden kann, welche diesen Punkt zur gemeinschaftlichen Spitze und die vieleckigen Flächen des Polyeders zu Basen haben, so kann auch das gleiche mit jedem tetrasphärischen Polyschem geschehen. Die Polynome, welche dasselbe begrenzen, seien $p, p', p'', p''', \ldots$ und mögen, wenn auch explizite 5 Variabeln darin vorkommen, doch wesentlich nur 4 unabhängige Variabeln repräsentieren. Wir können uns dann eine besondere Art von pentasphärischem Polyschem, $f_5(P,p,p',p'',p''',\ldots)$, denken, worin die Gleichung $P=0$ gleichsam als Basis ein tetrasphärisches Polyschem von allgemeiner Natur, und die Gleichungen $p=0$, $p'=0$, $p''=0$, $p'''=0, \ldots$ die zugehörige Spitze darstellen. Wird die Basis von irgend einer innern Lösung aus in pyramidenartige tetrasphärische Polyscheme zerlegt, so wird dieser Zerlegung auch eine des pentasphärischen Polyschems entsprechen, und für jeden Teil dieses letzten eine Gleichung wie (3) bestehen. Bei der Summierung dieser Gleichungen hat man dann

$$\Sigma f_4(P,q_1,q_2,\ldots q_m)=8,$$
$$\Sigma f_4(p,q_1,q_2,\ldots q_m)=f_4(p,p',p'',p''',\ldots),$$
$$\Sigma\Sigma f_4(P,p,q_i,q_{i+1})=\Sigma\left\{f_4(P,p,q,-q')+f_4(P,p',q',-q'')+(P,p'',q'',-q''')+\text{etc.}\right\},$$

wenn die Polynome $p, p', p'', \ldots$ zusammen ein Eck der Basis bilden, also nur 3 Variabeln repräsentieren, und die Polynome $q, q', q'', \ldots$ den durch dieses Eck gehenden Teilungen entsprechen und daher nur 2 Variabeln repräsentieren; wenn ferner das dem Aggregat vorgesetzte Summenzeichen sich auf alle Ecken der Basis bezieht; also endlich

$= \Sigma f_4 (P, p, p', p'', \ldots$ Eck der Basis);

$f(P, q) + f(P, -q) = 2$, also $\Sigma \Sigma f(P, q_i) =$ der doppelten Zahl der Basis $= \Sigma m$;

$f(p, q) + f(p', -q) = f(p, p')$, wenn das Paar Gleichungen $p = 0$, $p' = 0$ einer Seite der Basis entspricht;

$\Sigma \Sigma f(q_i, q_{i+1}) =$ der vierfachen Zahl der Ecken der Basis;

also zuletzt, indem man die Zahlen der Ecken, Seiten und Vielecke der Basis mit c_0, c_1, c_2 bezeichnet und die Glieder $-8 c_0 + 8 c_1 - 8 c_2 = -16$ setzt,

$f_5 (P, p, p', p'', p''', \ldots) = f_4 (p, p', p'', p''', \ldots) + \Sigma f_4 (P, p, p', p'', \ldots$ Eck der Basis) $- 2 \Sigma (m-2) f(P, p) - 2 \Sigma f(p, p'$ Seite der Basis) $+ 2 \Sigma m - 8$. . . . . . . (4)

Sind endlich $P, P', P'', P''', P^{IV}, \ldots$ die Grenzpolynome eines ganz beliebigen pentasphärischen Polyschems, so kann dieses von irgend einer innern Lösung aus in solche Polyscheme geteilt werden, wie das, welches wir soeben betrachtet haben. Werden dann die Polynome, welche die Teilung bewirken, wie vorhin, durch p bezeichnet, so hat man bei der Summation der Gleichung (4):

$\Sigma f_4 (p, p', p'', p''', \ldots$ Basis) = dem totalen tetrasphärischen Kontinuum = 16,

$\Sigma \Sigma f_4 (P, p, p', p'', \ldots$ Eck der Basis) $= \Sigma f_4 (P, P', P'', P''', \ldots$ Eck des pentasph. Polyschems),

$f(P, p) + f(P', -p) = f(P, P'$ Vieleck des Polyschems);

ferner, wenn die Polynome $p, p', p'', \ldots$ einer und derselben Seite des Polyschems entsprechen, also alle zusammen nur zwei Variabeln repräsentieren,

$$f(p, -p') + f(p', -p'') + f(p'', -p''') + \text{etc.} = 4,$$

folglich

$\Sigma \Sigma f(p, p'$ Seite der Basis) = der vierfachen Seitenzahl des pentasph. Polyschems.

Wenn man endlich die Zahlen der Ecken, Seiten, Vielecke, tetrasphärischen Perischeme des gegebenen pentasphärischen Polyschems mit b_0, b_1, b_2, b_3 bezeichnet und die Summation der Gleichung (4) ausführt, so erhält man

$f_5 (P, P', P'', P''', P^{IV}, \ldots) = \Sigma f_4 (P, P', P'', P''', \ldots$ Eck) $- 2 \Sigma (m-2) f(P, P'$ Vieleck) $+ 4 \Sigma m - 8 b_1 - 8 b_3 + 16$,



wo m die Zahl der Seiten eines Vielecks bezeichnet. Da $b_0 - b_1 + b_2 - b_3 = 0$ ist, so kann man dieser Gleichung auch die Form

$$\begin{aligned} & f_5(P, P', P'', P''', P^{IV}, \ldots) = \Sigma f_4(P, P', P'', P''', \ldots \text{Eck}) - 8 b_0 \\ & - 2\,\Sigma(m-2) f(P, P' \text{ Vieleck}) + 4(\Sigma m - 2 b_2) + 16 \\ & = 2\,\Sigma(m-2)\left\{2 - f(P, P' \text{ Vieleck})\right\} \\ & - \Sigma\left\{8 - f_4(P, P', P'', P''', \ldots \text{Eck})\right\} + 16 \end{aligned}$$

geben, wo die erste Summe sich auf alle Vielecke, die zweite auf alle Ecken des gegebenen pentasphärischen Polyschems erstreckt. Diese Gleichung stimmt mit der zu beweisenden (1) vollkommen überein.

So wie nun die Formel für das Kugelvieleck den Euler'schen Satz $a_0 - a_1 + a_2 = 2$ giebt, wenn man sie auf das durch Projektion eines Polyeders auf eine Kugelfläche gebildete Netz anwendet, so führt auch die Formel (1) auf den Satz $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 2$, wenn man sie auf das pentasphärische Netz anwendet, welches durch Projektion eines linearen Polyschems der fünffachen Totalität entsteht.

Das gegebene Polyschem (∞^5) habe a_0 Ecken, a_1 Kanten, a_2 Vielecke, a_3 Polyeder, a_4 vierfache Polyscheme;

irgend ein vierfaches Perischem desselben habe b_0 Ecken, b_1 Kanten, b_2 Vielecke, b_3 Polyeder;

ein Polyeder desselben habe c_0 Ecken, c_1 Kanten, c_2 Vielecke; in diesem grenzen 2 vierfache Perischeme zusammen;

ein Vieleck habe d Ecken, also auch d Seiten; es sei gemein e Polyedern, also auch e vierfachen Perischemen;

eine Kante hat immer 2 Ecken; sie sei gemein f_0 Vielecken, f_1 Polyedern, f_2 Perischemen;

ein Eck sei gemein g_0 Kanten, g_1 Vielecken, g_2 Polyedern, g_3 Perischemen.

Dann ist

$$\begin{array}{llll} \Sigma b_0 = \Sigma g_3, & \Sigma b_1 = \Sigma f_2, & \Sigma b_2 = \Sigma e, & \Sigma b_3 = 2 a_3 \\ \Sigma c_0 = \Sigma g_2, & \Sigma c_1 = \Sigma f_1, & \Sigma c_2 = \Sigma e, & \\ \Sigma d = \Sigma g_1, & \Sigma d = \Sigma f_0, & & \\ 2 a_1 = \Sigma g_0, & & & \end{array}$$

$$b_0 - b_1 + b_2 - b_3 = 0, \quad c_0 - c_1 + c_2 = 2, \quad f_0 - f_1 + f_2 = 2,$$
$$g_0 - g_1 + g_2 - g_3 = 0.$$

Wird nun die Gleichung (1), worin m durch d zu ersetzen ist, über das ganze pentasphärische Netz summiert, so geben je diejenigen f_4 zusammen, welche einem und demselben Eck des Netzes entsprechen, den Wert des totalen tetrasphärischen Kontinuums oder 16; aus $\Sigma f_4(p, p', p'', p''', \dots \text{Eck})$ wird daher $16\,a_0$.

Alle $f\,(p, p'$ Vieleck) zusammen, welche einem und demselben Vieleck entsprechen, geben 4. Aus $-2\,\Sigma(d-2)f(p, p'$ Vieleck$)-8\,\Sigma(d-2)=-8\,\Sigma d+16\,a_2$.

Was das folgende Glied $4\,\Sigma d$ betrifft, so wird im ganzen jedes d eines Vielecks so oft gezählt, als vierfache Perischeme dieses Vieleck gemein haben, also e mal. Aus $4\,\Sigma d$ wird demnach $4\,\Sigma\,d\,e$. Da aber $d\,e$ auch das Produkt der Zahl der Polyeder, welche ein Vieleck gemein haben, mit seiner Seitenzahl ist, so wird $\Sigma d e$ auch erhalten, indem man die Seitenzahlen aller Vielecke eines Polyeders addiert, was $2\,c_1$ giebt, und dann die so von allen Polyedern erhaltenen Zahlen summiert; folglich ist $\Sigma\,d\,e=2\,\Sigma\,c_1$. Aus $4\,\Sigma\,d$ wird also zuletzt $8\,\Sigma\,c_1$.

Die Summen der noch übrigen Glieder ergeben sich unmittelbar. Da nun 32 das Mass des totalen pentasphärischen Kontinuums ist, so erhält man:

$$32=16\,a_0-8\,\Sigma\,d+16\,a_2+8\,\Sigma\,c_1-8\,\Sigma\,b_0-8\,\Sigma\,b_2+16\,a_4. \quad \dots \quad (5)$$

Nun ist

$$-\Sigma\,d+\Sigma\,c_1=-\Sigma f_0+\Sigma f_1=\Sigma f_2-2\,a_1,$$
$$\Sigma\,b_0+\Sigma\,b_2=\Sigma\,b_1+\Sigma\,b_3=\Sigma f_2+2\,a_3.$$

Demnach verwandelt sich die Gleichung (5) in

$$32=16\,a_0+16\,a_2+16\,a_4-16\,a_1-16\,a_3,$$

oder

$$a_0-a_1+a_2-a_3+a_4=2,$$

was zu verifizieren war.

Das stufenweise Verfahren, welches wir bei der Konstruktion des Ausdrucks eines ganz beliebigen pentasphärischen Polyschems befolgt haben, wird desto länger und verwickelter, je höher die Ordnung der Perissosphäre steigt, und ist wohl kaum einer Verallgemeinerung fähig. Wendet man dasselbe noch auf das heptasphärische Polyschem an, wobei man, vom Plagioschem ausgehend, noch fünf andere Stufen durchlaufen muss, so gewähren die gefundenen Ausdrücke für das trisphärische, pentasphärische und heptasphärische Polyschem eine hinreichende Induktion, um aus denselben auf die Form des allgemeinen Ausdrucks für irgend ein perissosphärisches Polyschem zu schliessen. Wir setzen nämlich für ein $(2\,n+1)$-sphärisches Polyschem den Ausdruck

$$f_{2n+1}=\Sigma f_{2n}+\Sigma A_3 f_{2n-2}+\dots+\Sigma A_{2m+1} f_{2n-2m}+\dots+\Sigma A_{2n-1} f_2+A_{2n+1}. \quad (6)$$

Die im allgemeinen Glied angezeigte Summation erstreckt sich auf alle $(2m+1)$-sphärischen Perischeme; einem jeden derselben kommt eine ganze (positive oder negative) Zahl A_{2m+1} eigentümlich zu, welche nur von der Zahl und Anordnung der Teile dieses Perischems, keineswegs aber von seinen Argumenten abhängt; und das mit dieser Zahl multiplizierte f_{2n-2m} bedeutet dasjenige $(2n-2m)$-sphärische Polyschem, welches von allen Grenzpolynomen, deren Verschwinden das $(2m+1)$-sphärische Kontinuum des betrachteten Perischems bestimmt, gebildet oder umschlossen wird. Es ist z. B. immer $A_1 = 1$, ferner $A_3 = 4$ — die doppelte Anzahl der Ecken des betreffenden Kugelvielecks (trisphärischen Perischems). Die Richtigkeit der Form des Ausdrucks (6) muss ebenso durch Differentiation bewiesen werden, wie es in § 24 für die Gleichung (1) geschah; wir wollen uns deshalb nicht länger dabei aufhalten, sondern gehen sogleich zur Bestimmung der Integrationskonstanten A_{2n+1} über. Lassen wir alle Grenzpolynome des Polyschems f_{2n+1}, mit Inbegriff des Vorzeichens, koinzidieren, so wird dasselbe gleich dem halben $(2n+1)$-sphärischen Kontinuum, also gleich 2^{2n}; ebenso wird $f_{2n-2m} = 2^{2n-2m-1}$; man hat also, wenn ΣA_1 die Zahl der Ecken des Polyschems bezeichnet,

$$A_{2n+1} = 2^{2n} - 2^{2n-1}\,\Sigma A_1 - 2^{2n-3}\,\Sigma A_3 - \cdots - 2^{2n-2m-1}\,\Sigma A_{2m+1} - \cdots - 2\,\Sigma A_{2n-1}.$$

Die mit A bezeichneten Konstanten sind also immer durch Rekursionsformeln zu bestimmen, und hiermit ist unsre Aufgabe vollständig gelöst. Wahrscheinlich ist $(-1)^n$ das Vorzeichen von A_{2n+1}; doch sehe ich mich ausser Stand, diese Vermutung zu beweisen.

Am Ende dieses Paragraphen will ich noch eine merkwürdige Eigentümlichkeit tetrasphärischer Polyscheme erwähnen. Werden auf der positiven Seite eines jeden Grenzkontinuums eines gegebenen tetrasphärischen Polyschems f_4 Radien normal darauf gezogen, so bestimmen deren Endpunkte ein zu jenem reciprokes Polyschem F_4, dessen Ecken, Seiten, Vielecke resp. den Vielecken, Seiten, Ecken von f_4 entsprechen, und namentlich ist jedes Argument von F_4 das Supplement der entsprechenden Seite von f_4, und umgekehrt. Wenn nun irgend ein Argument von f_4 mit α, und die Seite, an welcher es liegt, mit a bezeichnet wird, so ist

$$d f_4 = \Sigma \frac{2a}{\pi}\, d\,\frac{2\alpha}{\pi}, \qquad d F_4 = -\Sigma \left(2 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) d\,\frac{2a}{\pi};$$

folglich

$$d\,(f_4 + F_4) = -\,d\,\Sigma \left(2 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \frac{2a}{\pi},$$

eine leicht zu integrierende Differentialgleichung. Um die Integrationskonstante zu bestimmen, nehmen wir die Seiten von f_4 verschwindend klein an; dann werden alle Ar-

gumente von F_4 dem Halbkreis gleich, und die Grenzpolynome von F_4 sämtlich, mit Inbegriff des Vorzeichens, identisch; es ist also zugleich $f_4 = 0$ und $F_4 =$ dem halben tetrasphärischen Kontinuum $= 8$. Hiedurch ist die Integrationskonstante bestimmt, und man hat allgemein

$$f_4 + F_4 = 8 - \Sigma \left(2 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \frac{2\alpha}{\pi}.$$

Ersetzt man die tetrasphärische Einheit durch ihren absoluten Wert $\frac{\pi^2}{8}$, so erhält man für die Summe zweier reciproker tetrasphärischer Polyscheme den Ausdruck

$$\pi^2 - \frac{1}{2} \Sigma (\pi - \alpha)\, \alpha.$$

§ 33. *Ueber reguläre sphärische Polyscheme.*

Die tetrasphärischen regulären Polyscheme entsprechen in Beziehung auf Zahl und Anordnung ihrer Teile genau den regulären Polyedern des Raums. Sind die trisphärischen Perischeme eines solchen lauter kongruente reguläre m-Ecke, deren je n in einem ebenfalls regulären Eck zusammentreffen, und sind alle Argumente gleich 2α, so soll das Polyschem mit $P_{m,n}(2\alpha)$ bezeichnet werden. Man ziehe aus seinem sphärischen Centrum O einen Kreisbogen OA normal auf ein trisphärisches Perischem, so wird der Fusspunkt A das Centrum dieses Perischems sein; von A aus ziehe man den Kreisbogen AA_1 normal auf eine Seite BB' des Perischems, so wird der Fusspunkt A_1 die Mitte von BB' sein. Dann ist $AOBA_1$ ein Orthoschem, worin die an den Seiten OA_1, A_1A, AB liegenden Argumente rechte und die an den Seiten AO, OB, OB, BA_1 liegenden resp. $\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \alpha$ sind; der Wert des Orthoschems ist also $f_4\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \alpha\right)$. Je $2m$ Orthoscheme setzen sich zu einem pyramidalen Polyschem zusammen, welches O zur Spitze und ein Vieleck zur Basis hat; und dieses ist wiederum im ganzen regulären Polyschem so oft enthalten, als die Zahl $4n : (2m + 2n - mn)$ seiner trisphärischen Perischeme anzeigt; folglich ist

$$P_{m,n}(2\alpha) = \frac{8mn}{2m + 2n - mn} f\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \alpha\right). \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

Für das Minimum von α ist $\sin\frac{\pi}{m}\sin\alpha = \cos\frac{\pi}{n}$; hier verschwindet P. Von da an kann α bis $\frac{\pi}{2}$ wachsen, wo dann $P_{m,n}(\pi) = 8$, d. h. gleich dem halben tetrasphärischen Kontinuum wird. Können mehrere Polyscheme $P_{m,n}(2\alpha)$ um ein Eck herum so zu-

sammengefügt werden, wie es dem Charakter (n, p) entspricht, d. h. so, dass jede vom Eck ausgehende Seite p Polyschemen gemein ist, so ist offenbar das Argument $2\alpha = \frac{2\pi}{p}$. Dieser Fall tritt ein, wenn das mit (m, n, p) bezeichnete lineare reguläre Polyschem der vierfachen Totalität auf die konzentrische Tetrasphäre pojiziert wird; die Projektion jedes Grenzpolyeders (m, n) ist dann ein tetrasphärisches $P_{m,n}\left(\frac{2\pi}{p}\right)$. Da nun das totale tetrasphärische Kontinuum . 16 beträgt, so ist die Zahl der Grenzpolyeder von (m, n, p) gleich $16 : P_{m,n}\left(\frac{2\pi}{p}\right)$. Wenn das betrachtete lineare Polyschem a_0 Ecken, a_1 Kanten, a_2 Vielecke, a_3 Polyeder zählt, so können wir demnach die Proportionen (1) des § 17 in die Gleichungen

$$\frac{a_0}{\frac{2}{n}+\frac{2}{p}-1} = \frac{p\,a_1}{2} = \frac{m\,a_2}{2} = \frac{a_3}{\frac{2}{m}+\frac{2}{n}-1} = \frac{2}{f\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; (2)$$

umsetzen. Durch dieselben werden § 17 und 30 in eine solche Verbindung gesetzt, dass, wenn die Ergebnisse des einen noch nicht bekannt wären, sie aus denen des andern gefunden werden könnten.

Nach dem bisherigen ist es wohl leicht zu verstehen, wenn ich hier den Ausdruck für ein pentasphärisches reguläres Polyschem, ohne Erklärung und Herleitung, hinsetze:

$$P_{m,n,p}(2\alpha) = \frac{16}{f\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}\right)} \left\{ f\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}\right) + f\left(\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}, \alpha\right) + \frac{2}{m}\cdot\frac{2\alpha}{\pi} - \frac{2}{m} - \frac{2}{n} - \frac{2}{p} - \frac{2\alpha}{\pi} + 2 \right\}.$$

Hat nun ein lineares reguläres Polyschem der fünffachen Totalität den Charakter (m, n, p, q), und ist a_0 die Zahl seiner Ecken u. s. f., so ergiebt sich aus der vorliegenden Formel leicht:

$$N a_0 = 2 f\left(\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}\right), \quad N a_1 = 2\left(\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1\right), \quad N a_2 = \frac{8}{mq},$$

$$N a_3 = 2\left(\frac{2}{m} + \frac{2}{n} - 1\right), \quad N a_4 = 2 f\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}\right),$$

wo abkürzend

$$N = f\left(\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}\right) + f\left(\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}\right) + \frac{4}{mq} - \frac{2}{m} - \frac{2}{n} - \frac{2}{p} - \frac{2}{q} + 2$$

gesetzt ist.

Diese Beispiele mögen hinreichen, um anzudeuten, wie derselbe Gegenstand auch für höhere Totalitäten zu behandeln wäre. Man würde dann die Formeln (4) und (5) des § 29 unmittelbar aus den durch Konstruktion gewonnenen Ergebnissen des § 18 herleiten können.

Wenn in der auf die Tetrasphäre bezüglichen Formel

$$P + Q = 8 - \Sigma \left(2 - \frac{2\alpha}{\pi}\right)\frac{2a}{\pi},$$

welche eine Anwendung des letzten Satzes von § 32 darstellen soll, Q oder bestimmter $Q(m, n, p)$ das tetrasphärische Mass eines Ecks des linearen regulären Polyschems (m, n, p) bezeichnet, so ist das zu Q reciproke P die Projektion des Grenzpolyeders von (p, n, m) oder ein $P_{p,n}\left(\frac{2\pi}{m}\right)$. Wenn also k die Zahl der Seiten von P und a den Wert einer solchen bezeichnet, so hat man

$$k = \frac{2np}{2n + 2p - np}, \qquad \cos\frac{a}{2} = \frac{\sin\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{p}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{m} - \cos^2\frac{\pi}{n}}},$$

$$Q(m, n, p) = 8 - P_{p,n}\left(\frac{2\pi}{m}\right) - k\left(2 - \frac{4}{m}\right)\frac{2a}{\pi}.$$

Wendet man diese Formel auf alle sechs regulären und einfachen Polyscheme an, indem man die Werte von $P_{p,n}\left(\frac{2\pi}{m}\right)$ direkt aus § 17 entnimmt, so erhält man:

$$Q(3, 3, 3) = -\frac{16}{5} + \frac{16\lambda}{\pi}, \quad a = \pi - 2\lambda, \qquad \text{wo } \cos 2\lambda = \frac{1}{4},$$

$$Q(3, 3, 5) = \frac{106}{5} - \frac{80\lambda}{\pi}, \quad a = 2\lambda - \frac{\pi}{3},$$

$$Q(3, 3, 4) = \frac{2}{3}, \quad a = \frac{\pi}{3},$$

$$Q(3, 4, 3) = 2, \quad a = \frac{\pi}{3},$$

$$Q(4, 3, 3) = 1, \quad a = \frac{\pi}{2},$$

$$Q(5, 3, 3) = \frac{382}{75}, \quad a = \frac{\pi}{5}.$$

Da nun

$$Q(m, n, p) = P_{n,p}(\pi - a) = 4kf\left(\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{p}, \frac{\pi - a}{2}\right)$$

ist, so folgt auch

$$f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \lambda\right) = -\frac{2}{15} + \frac{2\lambda}{3\pi}, \quad f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{2\pi}{3} - \lambda\right) = \frac{53}{300} - \frac{2\lambda}{3\pi},$$

$$Q\,(3,\,3,\,4) = P_{3,\,4}\left(\frac{2\,\pi}{3}\right),\qquad Q\,(3,\,4.\,3) = P_{4.\,3}\left(\frac{2\,\pi}{3}\right),\qquad Q\,(4,\,3,\,3) = P_{3,\,3}\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

$$Q\,(5,\,3,\,3) = P_{3.\,3}\left(\frac{4\,\pi}{5}\right) = \frac{382}{75} = \frac{191}{600}\cdot 16,\qquad f\left(\frac{\pi}{3},\,\frac{\pi}{3},\,\frac{2\,\pi}{5}\right) = \frac{191}{900}.$$

Von den angeführten Eckenmassen sind vier rational. Dieses hängt mit der stetigen Erfüllung der vierfachen Totalität durch lauter gleiche reguläre Polyscheme, welche wir am Ende von § 17 betrachtet haben, zusammen und bestätigt das dort Gesagte. Den drei Charakteren $(3,\,3,\,4,\,3)$, $(3,\,4,\,3,\,3)$, $(4,\,3,\,3,\,4)$ als den einzigen, nach denen eine einmalige Erfüllung möglich ist, ist aber noch ein vierter $\left(5,\,3,\,3,\,\frac{5}{2}\right)$ und sein reciproker beizufügen, von denen der erste eine wiederholte Erfüllung durch einfache, der zweite durch überschlagene Hekatonkaieikosascheme anzeigt. Man kann sich übrigens hievon auch mittelst des am Ende von § 17 gebrauchten Verfahrens überzeugen; wenn nämlich die gleichen Bezeichnungen gelten wie dort, so ist

$$\varrho\,(5,\,3,\,3) = \cos\left(\lambda - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{K}{R}\left(3,\,3,\,\frac{5}{2}\right).$$

Da wir nun $Q\,(5,\,3,\,3) = \frac{191}{600}\cdot 16$ gefunden haben, und das überschlagene Hexakosioschem $\left(3,\,3,\,\frac{5}{2}\right)$ sechshundert Grenztetraeder zählt, so liegen bei der durch $\left(5,3,3,\,\frac{5}{2}\right)$ angezeigten Erfüllung der vierfachen Totalität je 600 einfache Hekatonkaieikosascheme um eine Lösung herum und wiederholen dadurch die Totalität 191 Male. Folglich hat das überschlagene Hexakosioschem einen 191fachen Mantel. Im folgenden Paragraphen wollen wir dieses noch direkt aus der Konstruktion beweisen.

Für reguläre Polyscheme mit einfachem Mantel war die in den §§ 17 und 18 gegebene Aufzählung vollständig. Es frägt sich noch, wie viele es deren mit mehrfachem Mantel geben kann. Um die Antwort hierauf vorzubereiten, schicke ich folgende Betrachtung voran. Gesetzt, es gäbe eine durchaus symmetrische Verteilung von Lösungen auf der Polysphäre, deren ursprüngliches Netz mehrere Male herumgeht, so ziehe man die Kreisbogen, welche die kürzesten sphärischen Abstände darstellen, die es zwischen je zwei Lösungen geben kann; dann werden diese sich zu einfachen regulären Kugelvielecken, diese wiederum zu einfachen regulären tetrasphärischen Polyschemen, u. s. f. gruppieren; die Perischeme höchster Ordnung endlich werden ebenfalls regulär und einfach sein und können das totale polysphärische Kontinuum nur einmal besetzen. Wenn also auch in irgend einer Totalität überschlagene reguläre Polyscheme existieren, so können sie doch keine neue Art von symmetrischer Verteilung der Radien einer Polysphäre erzeugen, welche nicht bereits von einem einfachen regulären Polyscheme geliefert worden wäre. Wenn nun im Charakter eines regulären Polyschems keine

andern Ziffern als 3 und 4 vorkommen, so ist leicht einzusehen, dass es rein unmöglich ist, seine Ecken so zu verbinden, dass etwas Ueberschlagenes entsteht. Die einzige noch vorkommende Ziffer — denn von der zweifachen Totalität, welche eine endlose Mannigfaltigkeit regulärer Gebilde gestattet, kann hier keine Rede sein — ist 5 und kommt nur in der dreifachen und vierfachen Totalität vor; ihr entspricht das einfache, der Ziffer $\frac{5}{2}$ dagegen das überschlagene Fünfeck. Lässt man reziproke Gebilde weg, so können überschlagene Polyscheme nur im Raume und in der vierfachen Totalität resp. durch andere Verbindung der Ecken des einfachen Ikosaeders und des einfachen Hexakosioschems gebildet werden.

§ 34. *Nähere Untersuchung der Hexakosioscheme.*

Zum leichtern Verständnis alles folgenden ist es nötig, mehrere trigonometrische Relationen, welche das räumliche Ikosaeder betreffen, vor Augen zu haben. Man projiziere die Oberfläche des Ikosaeders auf eine konzentrische Kugel und merke sich ausser den Ecken des Netzes noch die Mittelpunkte seiner Dreiecke und die Mitten seiner Seiten; man wird dann immer Kugeldreiecke finden, deren blosse Anschauung zum Beweise der erwähnten trigonometrischen Relationen hinreicht.

Sind ABC, ABD zwei benachbarte Dreiecke eines Ikosaeders, E, F ihre Mittelpunkte, O das Centrum des Ikosaeders, $a = \angle AOB$, $b = \angle COE$, $b' = \angle COF$, so ist

$$a + b + b' = \pi, \qquad \cos a = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \sin a = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\cos b = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}}}, \qquad \sin b = \sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}}, \qquad \operatorname{tang} b = 3 - \sqrt{5},$$

$$\cos b' = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{3\sqrt{5}}}, \qquad \sin b' = \sqrt{\frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}}, \qquad \operatorname{tang} b' = 3 + \sqrt{5}.$$

Mittelst dieser Winkel können wir nun die tetrasphärischen Werte der 120 Ecken des einfachen Hexakosioschems, wie folgt, angeben. Die eingeklammerten Buchstaben bezeichnen, gleichwie in § 17, die in die einzelnen Zonen fallenden Gruppen von Ecken. Eine ganze Zahl, welche die Werte 0, 1, 2, 3, 4 durchläuft, ist mit i bezeichnet. Die Bedeutung der tetrasphärischen Variabeln Θ, φ, ψ erhellt aus ihren Beziehungen zu den orthogonalen Variabeln w, x, y, z:

$$w = \cos\Theta, \quad x = \sin\Theta\cos\varphi, \quad y = \sin\Theta\sin\varphi\cos\psi, \quad z = \sin\Theta\sin\varphi\sin\psi.$$

Tetrasphärische Werte der 120 Ecken des einfachen Hexakosioschems.

(a): $\Theta = 0;$

(b): $\Theta = \frac{\pi}{5}, \left\{\varphi = 0, \begin{pmatrix}\varphi = a \\ \psi = \frac{2i\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \pi - a \\ \psi = \frac{(2i+1)\pi}{5}\end{pmatrix}, \quad \varphi = \pi\right\};$

(c): $\Theta = \frac{\pi}{3}, \left\{\begin{pmatrix}\varphi = b \\ \psi = \frac{(2i+1)\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = b' \\ \psi = \frac{(2i+1)\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \pi - b' \\ \psi = \frac{2i\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \pi - b \\ \psi = \frac{2i\pi}{5}\end{pmatrix}\right\};$

(d): $\Theta = \frac{2\pi}{5}, \left\{\varphi = 0, \begin{pmatrix}\varphi = a \\ \psi = \frac{2i\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \pi - a \\ \psi = \frac{(2i+1)\pi}{5}\end{pmatrix}, \quad \varphi = \pi\right\};$

(e): $\Theta = \frac{\pi}{2}, \left\{\begin{pmatrix}\varphi = \frac{a}{2} \\ \psi = \frac{2i\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \frac{\pi - a}{2} \\ \psi = \frac{(2i+1)\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \frac{\pi}{2} \\ \psi = \frac{(2i+1)\pi}{10}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \frac{\pi + a}{2} \\ \psi = \frac{2i\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \pi - \frac{a}{2} \\ \psi = \frac{(2i+1)\pi}{5}\end{pmatrix}\right\};$

(f): $\Theta = \frac{3\pi}{5}, \left\{\varphi = 0, \begin{pmatrix}\varphi = a \\ \psi = \frac{2i\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \pi - a \\ \psi = \frac{(2i+1)\pi}{5}\end{pmatrix}, \quad \varphi = \pi\right\};$

(g): $\Theta = \frac{2\pi}{3}, \left\{\begin{pmatrix}\varphi = b \\ \psi = \frac{(2i+1)\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = b' \\ \psi = \frac{(2i+1)\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \pi - b' \\ \psi = \frac{2i\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \pi - b \\ \psi = \frac{2i\pi}{5}\end{pmatrix}\right\};$

(h): $\Theta = \frac{4\pi}{5}, \left\{\varphi = 0, \begin{pmatrix}\varphi = a \\ \psi = \frac{2i\pi}{5}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi = \pi - a \\ \psi = \frac{(2i+1)\pi}{5}\end{pmatrix}, \quad \varphi = \pi\right\};$

(i): $\Theta = \pi.$

Die Ecken b, d, e, f, h sind Ecken von Ikosaedern, die Ecken c, g sind Mittelpunkte der Dreiecke eines Ikosaeders, und die Ecken e sind Mitten von Kanten eines solchen. Da die Entfernung aller Ecken vom Centrum als lineare Einheit angenommen ward, so beträgt die Seite $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ist also gleich der Seite des regulären Zehnecks. Die Durchschnitte des Polyschems, welche durch lineare Kontinua $w =$ const. entstehen, können, indem man von der Variabeln w absieht, als Körper betrachtet werden. Wir wollen dieselben der Reihe nach untersuchen.

Der Schnitt $w = \cos\frac{\pi}{5}$ ist ein Ikosaeder, dessen Dreiecke sämtlich Grenztetraedern angehören.

Der Schnitt $w = \cos\frac{\pi}{3}$ ist ein Dodekaeder mit der Seite $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, auf dessen Fünfecken Pyramiden aufgesetzt sind, deren Seiten $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ betragen. Die Ecken c dieses Dodekaeders gehören dem Hexakosioschem an, ebenso die Kanten; aber die 60 gleichschenkligen Dreiecke, welche den Schnittkörper begrenzen, sind Tetraederschnitte, geführt durch eine Kante, und die Gegenkante im mittlern und äussern Verhältnisse teilend. Diese Gegenkante verbindet zwei homothetische Ecken b und d; und wenn m den Teilungspunkt bezeichnet, so ist $bd : bm = bm : md$, also auch $1 : bd = bd : bm$.

Der Schnitt $w = \cos\frac{2\pi}{5}$ enthält die 12 Ecken d und schneidet jede der 60 Seiten ce in einem Punkte n so, dass $1 : ce = ce : cn = cn : ne$. Der Schnittkörper ist von 20 gleichseitigen Dreiecken mit der Seite $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, 60 gleichschenkligen Dreiecken mit der Basis $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ und der Seite $\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, und 60 gleichschenkligen Dreiecken mit der Basis $\sqrt{5}-2$ und der Seite $\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ begrenzt. Die gleichseitigen Dreiecke, Durchschnitte der Tetraeder $ceee$, können als Abstumpfungsflächen der Ecken eines Dodekaeders aufgefasst werden, und die 120 gleichschenkligen Dreiecke, Durchschnitte der Tetraeder $cdee$ und $ccde$, bilden dann zehnseitige auf die Dodekaederflächen gesetzte Pyramiden.

Der Schnitt $w = 0$ enthält die 30 Ecken e und halbiert jede der 12 Seiten df. Der Schnittkörper wird aus einem Ikosaeder, dessen Seiten den Wert $\sqrt{5}-1$ haben, erhalten, wenn man durch Ebenen, welche diese Seiten halbieren, seine Ecken abstumpft, und auf die durch die Abstumpfung entstandenen regulären Fünfecke Pyramiden aufsetzt, deren Seiten $\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ betragen.

Die nun folgenden Schnitte sind in umgekehrter Ordnung dieselben wie die vorigen.

Uebersicht und Anzahl aller Seiten.

Das Eck a ist mit jedem b durch eine Seite verbunden, Zahl 12. Je zwei b sind durch eine Seite verbunden; Zahl gleich derjenigen der Kanten eines Ikosaeders, also 30. Die Seiten bc vereinigen Ecken, die sich wie Mitte und Eck eines Dreiecks des Ikosaeders entsprechen; ihre Zahl ist also $3 \cdot 20 = 60$. Die Seiten bd verbinden Ecken, welche demselben Eck des Ikosaeders entsprechen, sind also zwölf an der Zahl. Die Seiten cc verbinden Ecken, welche den Mittelpunkten zweier benachbarten Dreiecke des Ikosaeders entsprechen, also 30. Die Seiten cd verbinden Ecken, die dem Mittelpunkt und einem Eck einer und derselben Ikosaederfläche entsprechen, also 60 an Zahl. Die Seiten ce verbinden Ecken, die dem Mittelpunkt und einer Seitenmitte einer und der-

selben Ikosaederfläche entsprechen, also 60. Die Seiten de verbinden Ecken, welche einem Ende und der Mitte einer Kante des Ikosaeders entsprechen, also 60. Die Seiten df verbinden Ecken, welche einem und demselben Eck des Ikosaeders entsprechen, also 12. Die Seiten ee verbinden Ecken, welche den Mitten zweier benachbarten Kanten des Ikosaeders entsprechen, also 60. Von da an Wiederholung in umgekehrter Ordnung. Mit Ausnahme der Seiten df und ee sind also die Anzahlen aller übrigen Seiten zu verdoppeln, wodurch sich 720 als Anzahl aller Seiten ergiebt.

Denkt man sich, wie bisher, alle Ecken in dasselbe äquatoriale ikosaedrische Netz projiziert, und bedeutet dann w den äquatorialen Abstand zweier durch eine Seite verbundener Ecken, so sind die Verbindungen derselben zu Seiten immer so beschaffen, dass w den kleinstmöglichen Wert hat, wie folgende Uebersicht zeigt:

ab, hi	ohne Bedingung,	cd, fg,	$w = b$,
bb, hh,	$w = a$,	ce, eg,	$w = \frac{b' - b}{2}$,
bc, gh,	$w = b$,	de, ef,	$w = \frac{a}{2}$,
bd, fh,	$w = 0$,	df,	$w = 0$,
cc, gg,	$w = b' - b$,	ee,	$w = \frac{\pi}{5}$.

Die Tetraeder, aus denen der Umschluss besteht, sind folgende: $abbb$ 20, $bbbc$ 20, $bbcc$ 30, $bccd$ 60, $ccde$ 60, $cdee$ 60, $eeee$ 20, $deef$ 60, etc., im ganzen 600.

Nachdem wir so die Struktur des einfachen Hexakosioschems untersucht haben, bereiten wir uns zu einer ähnlichen Behandlung des überschlagenen vor, indem wir zuerst das überschlagene Ikosaeder $\left(3, \frac{5}{2}\right)$ betrachten. Ist φ Poldistanz und ψ Azimut, so bilden die Ecken $\varphi = 0$; $\varphi = \pi - a$, $\left(\psi = 0;\ \psi = \frac{4\pi}{5}\right)$ ein Dreieck, die Ecken der ersten Zone sind durch $\varphi = \pi - a$, $\psi = \frac{4i\pi}{5}$ dargestellt; ferner bilden die zwei Ecken $\varphi = \pi - a$, $\left(\psi = 0;\ \psi = \frac{4\pi}{5}\right)$ mit dem Eck $\varphi = a$, $\psi = \frac{7\pi}{5}$ ein Dreieck, die Ecken der zweiten Zone sind in der Formel $\varphi = a$, $\psi = \frac{(4i-3)\pi}{5}$ enthalten. Dies reicht hin, um von der Verbindung der Ecken eine deutliche Vorstellung zu geben. Um nun zu beurteilen, wie vielfach der Mantel dieses Ikosaeders umgeschlagen ist, untersuchen wir nur, wie oft die um den Pol $\varphi = 0$ herumliegende unendlich kleine Stelle der Kugelfläche von der Projektion des Ikosaedermantels bedeckt wird, oder, was dasselbe ist, wie oft ein vom Centrum ausgehender, unendlich wenig von der positiven Axenhälfte abweichender, aber sonst freier Strahl den Mantel des Ikosaeders durchbohrt.

Da das überschlagene Fünfeck einen doppelten Umlauf hat, so bilden die fünf Dreiecke, welche den Pol $\varphi = 0$ mit den Ecken der ersten Zone $\varphi = \pi - a$ verbinden, einen doppelten Mantel. Die Dreiecke, welche je zwei Ecken der ersten Zone mit einem der zweiten verbinden, gehören nicht hieher, weil sie zwischen dem Centrum und dem Gegenpol $\varphi = \pi$ durchgehen. Jedes Dreieck dagegen, welches ein Eck der ersten Zone mit zweien der zweiten verbindet, geht zwischen dem Centrum und dem Pol durch, und seine Projektion bedeckt die Gegend des letzten ringsum vollständig; alle fünf Dreiecke dieser Art bilden also einen fünffachen Mantel. Die fünf letzten Dreiecke endlich, welche je zwei Ecken der zweiten Zone $\varphi = a$ mit dem Gegenpol $\varphi = \pi$ verbinden, kommen nicht in Betracht, weil sie sich auf den Gegenpol projizieren. Wir schliessen hieraus auf einen siebenfachen Mantel des überschlagenen Ikosaeders. Ist seine Seite 1, so ist der Radius der umschriebenen Kugel $\varrho = \dfrac{1}{2 \cos \frac{a}{2}} = \sin \frac{\pi}{5}$.

Nach dieser Vorbereitung gehen wir an die Untersuchung der Massverhältnisse des überschlagenen Hexakosioschems $\left(3, 3, \frac{5}{2}\right)$. Das Eck a sei Pol $\Theta = 0$. Ist Θ die Poldistanz der in seiner Basis liegenden und ein $\left(3, \frac{5}{2}\right)$ bildenden Ecken, so ist $\cos \frac{\Theta}{2} = \varrho = \sin \frac{\pi}{5}$, also $\Theta = \frac{3\pi}{5}$ die erste Zone (f). Wird das Eck f, für welches $\varphi = \pi$, mit dem Eck a vertauscht, so geschieht dies durch die Transformationsformeln:

$$\begin{aligned}
\cos \Theta &= -\cos \frac{2\pi}{5} \cos \Theta' - \sin \frac{2\pi}{5} \sin \Theta' \cos \varphi', \\
\sin \Theta \cos \varphi &= -\sin \frac{2\pi}{5} \cos \Theta' + \cos \frac{2\pi}{5} \sin \Theta' \cos \varphi', \\
\sin \Theta \sin \varphi &= \sin \Theta' \sin \varphi', \\
\psi &= \psi'.
\end{aligned}$$

Mittelst derselben können wir genau das konstruktive Verfahren in § 17 nachahmen. Wir kennen nämlich die Werte von Θ, φ, ψ, welche den Ecken f der ersten Zone entsprechen. Setzen wir dieselben an die Stelle von Θ', φ', ψ', so lernen wir die Ecken der ersten Zone für den Pol $\Theta' = 0$ kennen; unter diesen finden sich neue Ecken für den Pol $\Theta = 0$, und wir sehen das Gebiet der bekannten Ecken von diesem ursprünglichen Pol aus erweitert. Indem wir diese Erweiterung auf den zweiten Pol $\Theta' = 0$ übertragen, so wird durch die entsprechenden Substitutionen das Gebiet des ersten Pols wieder erweitert. Wird dieses Verfahren lange genug fortgesetzt, so werden uns endlich alle Ecken zugleich mit ihrer Verbindung bekannt. Ich lasse hier eine Tafel der Substitutionsergebnisse folgen, in der Absicht, daraus die Ordnung herzuleiten, in welcher die Ecken durch Seiten verbunden sind.

1.	(a)	$\Theta' = 0$	$\Theta = \frac{3\pi}{5}, \quad \varphi = \pi$	(f)
2.	(f)	$\Theta' = \frac{3\pi}{5}, \quad \varphi' = \pi - a$	$\Theta = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi = b'$	(c)
3.	(f)	$\Theta' = \frac{3\pi}{5}, \quad \varphi' = 0$	$\Theta = \frac{4\pi}{5}, \quad \varphi = 0$	(h)
4.	(c)	$\Theta' = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi' = \pi - b$	$\Theta = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi = \pi - b$	(c)
5.	(c)	$\Theta' = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi' = b$	$\Theta = \frac{4\pi}{5}, \quad \varphi = \pi - a$	(h)
6.	(c)	$\Theta' = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi' = \pi - b'$	$\Theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi + a}{2}$	(e)
7.	(h)	$\Theta' = \frac{4\pi}{5}, \quad \varphi' = a$	$\Theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{a}{2}$	(e)
8.	(h)	$\Theta' = \frac{4\pi}{5}, \quad \varphi' = \pi$	$\Theta = \frac{\pi}{5}, \quad \varphi = 0$	(b)

Da jede Substitution mit ihrem Resultat vertauscht werden kann, und da, wenn Θ', φ' durch $\pi - \Theta'$, $\pi - \varphi'$ ersetzt werden, auch Θ, φ in $\pi - \Theta$, $\pi - \varphi$ übergehen, so braucht diese Tafel nicht weiter fortgesetzt zu werden.

Wenn die Werte einer Lösung der Gleichung $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1$ genügen, so nenne ich die Lösung $\left(0, \frac{x}{\sqrt{1-w^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-w^2}}, \frac{z}{\sqrt{1-w^2}}\right)$ die äquatoriale Projektion der ursprünglichen Lösung (w, x, y, z), und den auf der äquatorialen Kugel $(w = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1)$ gemessenen Abstand zweier solcher Projektionen nenne ich äquatorialen Abstand der zwei ursprünglichen Lösungen. Sind nun Θ, φ, ψ; Θ', φ', ψ' die tetrasphärischen Werte zweier Ecken des Polyschems, γ ihr tetrasphärischer und w ihr äquatorialer Abstand, so ist

$$\cos\gamma = \cos\Theta \cos\Theta' + \sin\Theta \sin\Theta' \cos w, \quad \cos w = \cos\varphi \cos\varphi' + \sin\varphi \sin\varphi' \cos(\psi - \psi').$$

Jede Eckenverbindung wird durch das entsprechende w hinreichend bestimmt. Hier folgt nun eine Uebersicht aller Eckenverbindungen mit Angabe ihrer Herleitung aus der vorigen Tafel.

af. Keine Bedingung.

ff. $w = \pi - a$.

fc. Durch die Formeln 1., 2. geht eine Verbindung af in eine fc über, wo $w = \pi - b'$.

fh. Durch 1., 3. geht eine af in eine fh über, wo $w = \pi$.

cc. Durch 2. geht eine Verbindung ff mit dem Azimutunterschied $\psi = \frac{4\pi}{5}$ in eine cc mit demselben Azimutunterschied über; also

$$\cos w = \cos^2 b' + \sin^2 b' \cos\frac{4\pi}{5} = -\cos(b' - b), \quad w = \pi - (b' - b).$$

ch. Durch 2. und 3. geht eine Verbindung *ff* in eine *ch* über, wo $w = b'$.

ce. Durch 2., 6. geht eine *fc* mit dem Azimutunterschied $\frac{3\pi}{5}$ in eine *ce* über, also $\cos w = \cos b' \cos \frac{\pi + a}{2} + \sin b' \sin \frac{\pi + a}{2} \cos \frac{3\pi}{5}$, $w = \frac{\pi}{2} + \frac{b' - b}{2}$.

he. Durch 3., 6. geht eine *fc* in eine *he* über, wo $w = \frac{\pi + a}{2}$.

hb. Durch 3., 8. geht eine *fh* in eine *hb* über, wo $w = 0$.

ee. Durch 6., 7. geht eine *ch* mit Azimutunterschied $\psi = \frac{2\pi}{5}$ in eine *ee* über, wo $w = \frac{3\pi}{5}$.

Von hier an wird eine weitere Fortsetzung überflüssig. Gemäss dem bisherigen sind nun in folgender Tafel die Seiten des Polyschems vollständig aufgezählt.

af, *di*, ohne Bedingung.	*ch*, *bg*, $w = b'$.
ff, *dd*, $w = \pi - a$.	*ce*, *eg*, $w = \frac{\pi}{2} + \frac{b' - b}{2}$.
fc, *gd*, $w = \pi - b'$.	*he*, *eb*, $w = \frac{\pi + a}{2}$.
fh, *bd*, $w = \pi$.	*hb*, $w = 0$.
cc, *gg*, $w = \pi - (b' - b)$.	*ee*, $w = \frac{3\pi}{5}$.

Die Verbindungen von je vier Ecken zu einem Tetraeder sind:

afff, *fffc*, *ffcc*, *fcch*, *cche*, *chee*, *ceee*, *heeb*, *ceeg*, *eebg*, *ebgg*, *bggd*, *ggdd*, *gddd*, *dddi*.

Wir schicken uns jetzt an, die Frage zu beantworten, in wie vielen Lösungen ein vom Centrum ausgehender Strahl den Umschluss des überschlagenen Hexakosioschems schneidet, oder wie oft in der tetrasphärischen Projektion desselben das totale tetrasphärische Kontinuum enthalten ist. Für diesen Zweck reicht es hin, zu untersuchen, in welchen der vorhin aufgezählten Klassen die Tetraeder die positive Hälfte der Axe w schneiden.

I. Die 20 Tetraeder *afff* haben den Pol $w = 1$ zum gemeinschaftlichen Scheitel. Ein nahe beim Pol senkrecht auf die Axe geführter Schnitt ist ein überschlagenes Ikosaeder, und ein von einem innern Punkte des Schnittraums ausgehender und diesem Raum angehörender Strahl trifft die Grenzoberfläche 7 Mal. Dreht man nun den Strahl um seinen Anfangspunkt aus dem Schnittraume heraus, so muss er fortfahren, den Umschluss des Polyschems, insofern er nur aus diesen 20 Tetraedern besteht, 7 Male zu schneiden; und nur, wenn er nach dem Pole $w = 1$ selbst geht, schneidet er nur einmal. Es ist leicht, dies auf einen vom Centrum ausgehenden, der Axe w unendlich nahen Strahl überzutragen.

II. Die Tetraeder $fffc$ sind 20 an der Zahl. Werden alle vier Ecken eines solchen Tetraeders auf die äquatoriale Kugel projiziert, so bilden die Ecken f ein Kugeldreieck, dessen Seiten $\pi - a$ betragen, und das Eck c ist dem Mittelpunkt dieses Dreiecks, der von den Ecken um b' absteht, antipod. Man kann demnach die Werte der vier Ecken so ansetzen:

$$(f)\quad w = \cos\frac{3\pi}{5},\ x = \sin\frac{3\pi}{5}\cos b',\ y = \sin\frac{3\pi}{5}\sin b',\qquad z = 0;$$

$$(f')\quad w = \cos\frac{3\pi}{5},\ x = \sin\frac{3\pi}{5}\cos b',\ y = \sin\frac{3\pi}{5}\sin b'\cos\frac{2\pi}{3},\ z = \sin\frac{3\pi}{5}\sin b'\sin\frac{2\pi}{3};$$

$$(f'')\quad w = \cos\frac{3\pi}{5},\ x = \sin\frac{3\pi}{5}\cos b',\ y = \sin\frac{3\pi}{5}\sin b'\cos\frac{2\pi}{3},\ z = -\sin\frac{3\pi}{5}\sin b'\sin\frac{2\pi}{3};$$

$$(c)\quad w = \cos\frac{\pi}{3},\ x = -\sin\frac{\pi}{3},\quad y = 0,\qquad z = 0.$$

Sind p, q, r, s beliebige positive Faktoren, für welche $p + q + r + s = 1$ ist, und multipliziert man die orthogonalen Werte der vier Ecken mit denselben, so sind die Summen der Produkte die Werte irgend einer innerhalb des Tetraeders liegenden Lösung. Richtet man die Faktoren so ein, dass die Variabeln x, y, z verschwinden, so wird w der erste Wert der Lösung, in welcher der Raum des Tetraeders die Axe schneidet. Kann dieses durch positive Faktoren geschehen, so schneidet der Tetraeder selbst die Axe, ohne dass es einer Verlängerung seines Raumes bedarf. Man erhält

$$p = q = r = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}},\quad s = \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}},\quad w = -\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = -1 + 3\,\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}.$$

Das Tetraeder $ff'f''c$ schneidet demnach die Axe auf der negativen Seite; also schneiden die 20 Tetraeder $gddd$ die Axe auf der positiven Seite.

III. Die Tetraeder $ffcc$ sind 30 an Zahl. Da $w\,(ff) = \pi - a$, $w\,(cc) = \pi - (b' - b)$, $w\,(fc) = \pi - b'$. Man kann daher den vier Ecken folgende tetrasphärische Werte geben:

$$(f, f')\ \Theta = \frac{3\pi}{5},\ \varphi = \frac{\pi - a}{2},\ (f)\ \psi = 0,\quad (f')\ \psi = \pi;$$

$$(c, c)\ \ \Theta = \frac{\pi}{3},\ \varphi = \frac{b' - b}{2},\qquad \psi = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Aus diesen folgen die orthogonalen Werte:

$$w = \cos\frac{3\pi}{5},\ x = \sin\frac{3\pi}{5}\sin\frac{a}{2},\qquad y = \pm\sin\frac{3\pi}{5}\cos\frac{a}{2},\ z = 0;$$

$$w = \cos\frac{\pi}{3},\ x = -\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{b'-b}{2},\ y = 0,\qquad z = \pm\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{b'-b}{2}.$$

Für die Durchschnittslösung der Axe wird

$$p = q = \frac{3-\sqrt{5}}{4}, \quad r = s = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad w = \frac{3-\sqrt{5}}{4}.$$

Die 30 Tetraeder $ffcc$ schneiden also die Axe auf der positiven Seite.

IV. Die Tetraeder $fcch$ sind 60 an Zahl. $w(fh) = \pi$, $w(ch) = b'$. Tetrasphärische Werte der Ecken: (f) $\Theta = \frac{3\pi}{5}$, $\varphi = \pi$; (h) $\Theta = \frac{4\pi}{5}$, $\varphi = 0$; (c, c') $\Theta = \frac{\pi}{3}$, $\varphi = b'$, $\psi = \pm \frac{2\pi}{5}$. Orthogonale Werte:

$$\begin{aligned}
&(f) \quad w = -\cos\frac{2\pi}{5}, \quad x = -\sin\frac{2\pi}{5}, \quad y = 0, \quad z = 0;\\
&(h) \quad w = -\cos\frac{\pi}{5}, \quad x = \sin\frac{\pi}{5}, \quad y = 0, \quad z = 0;\\
&(c, c') \; w = \cos\frac{\pi}{3}, \quad x = \sin\frac{\pi}{3}\cos b', \quad y = \sin\frac{\pi}{3}\sin b'\cos\frac{2\pi}{5}, \quad z = \pm\sin\frac{\pi}{3}\sin b'\sin\frac{2\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Hieraus $r = s = 0$, $p = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$, $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $w = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Also schneiden die 60 Tetraeder $bggd$ die Axe auf der positiven Seite.

V. Die Tetraeder $cche$ sind 60 an Zahl. Tetrasphärische Werte der Ecken: (c, c') $\Theta = \frac{\pi}{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{b'-b}{2}$, $\psi = 0, \pi$; (e) $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \pi$; (h) $\Theta = \frac{4\pi}{5}$, $\varphi = \frac{\pi - a}{2}$, $\psi = \frac{\pi}{2}$. Orthogonale Werte:

$$\begin{aligned}
&(c, c') \; w = \cos\frac{\pi}{3}, \quad x = \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{b'-b}{2}, \; y = \pm\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{b'-b}{2}, \quad z = 0;\\
&(e) \quad w = 0, \quad x = -1, \quad y = 0, \quad z = 0;\\
&(h) \quad w = -\cos\frac{\pi}{5}, \; x = \sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{a}{2}, \quad y = 0, \quad z = \sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{a}{2}.
\end{aligned}$$

$$p = q = \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \quad r = \sqrt{5} - 2, \quad s = 0, \quad w = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Die 60 Tetraeder $cche$ schneiden also die Axe auf der positiven Seite.

VI. Die Tetraeder $chee$ sind 60 an Zahl. Tetrasphärische Werte der Ecken: (h) $\Theta = \frac{4\pi}{5}$, $\varphi = 0$; (e) $\Theta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi + a}{2}$, $\psi = \pm\frac{2\pi}{5}$; (c) $\Theta = \frac{\pi}{3}$, $\varphi = b'$, $\psi = \pi$. Orthogonale Werte:

$$(h)\quad w = -\cos\frac{\pi}{5},\quad x = \sin\frac{\pi}{5},\qquad y = 0,\qquad z = 0;$$

$$(e, e')\ w = 0,\quad x = -\sin\frac{a}{2},\quad y = \cos\frac{a}{2}\cos\frac{2\pi}{5},\quad z = \pm\cos\frac{a}{2}\sin\frac{2\pi}{5};$$

$$(c)\quad w = \cos\frac{\pi}{3},\quad x = \sin\frac{\pi}{3}\cos b',\quad y = -\sin\frac{\pi}{3}\sin b',\quad z = 0.$$

$$p = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2,\quad q = r = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3,\quad s = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4,\quad w = -(\sqrt{5}-2).$$

Also schneiden die 60 Tetraeder *eebg* die Axe auf der positiven Seite.

VII. Die Tetraeder *ceee* sind 20 an Zahl.

$$(c)\quad \Theta = \frac{\pi}{3},\ \varphi = \pi;\ (e, e', e'')\ \Theta = \frac{\pi}{2},\ \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{b'-b}{2},\ \psi = 0, \pm\frac{2\pi}{3}.$$

$$(c)\quad w = \cos\frac{\pi}{3},\quad x = -\sin\frac{\pi}{3},\quad y = 0,\qquad z = 0;$$

$$(e)\quad w = 0,\quad x = \sin\frac{b'-b}{2},\quad y = \cos\frac{b'-b}{2},\qquad z = 0;$$

$$(e'\,e'')\,w = 0,\quad x = \sin\frac{b'-b}{2},\quad y = -\cos\frac{b'-b}{2}\cos\frac{\pi}{3},\ z = \pm\cos\frac{b'-b}{2}\sin\frac{\pi}{3}.$$

$$p = 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4,\quad q = r = s = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3,\quad w = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4.$$

Also schneiden die 20 Tetraeder *ceee* die Axe auf der positiven Seite.

VIII. Die Tetraeder *heeb* sind 60 an Zahl. Jedes hat eine mit der Axe parallele Seite *hb* und schneidet also die Axe im unendlich entfernten Punkte.

Wenn für ein Tetraeder alle vier Faktoren p, q, r, s positiv und von Null verschieden sind, und wenn auch w positiv ist, so umgiebt seine tetrasphärische Projektion den Pol $\Theta = 0$ vollständig. Ist e i n e r jener vier Faktoren gleich Null, so fällt der Punkt der Axe in eine Seitenfläche des Tetraeders; und man muss die zwei Tetraeder, welche diese Seitenfläche gemein haben, zusammennehmen, damit der Pol $\Theta = 0$ von den Projektionen ringsum bedeckt werde; so in V; die Tetraeder *cche* zählen also nur für 30 Deckungen. Sind z w e i jener vier Faktoren gleich Null, so liegt der Punkt der Axe auf einer Kante des Tetraeders. Da nun 5 Tetraeder diese Kante gemein haben und 2 mal um dieselbe herumgehen, so wird von den Projektionen dieser 5 Tetraeder zusammen der Pol erst 2 mal ringsum bedeckt. So in IV; die Tetraeder *bggd* zählen also nur für 24 Deckungen.

Demnach geben die Tetraeder *afff* 7, *gddd* 20, *ffcc* 30, *bggd* 24, *cche* 30, *eebg* 60, *ceee* 20, im ganzen 191 Bedeckungen des positiven Pols.

D i e t e t r a s p h ä r i s c h e P r o j e k t i o n d e s ü b e r s c h l a g e n e n H e x a k o s i o s c h e m s e n t h ä l t a l s o 1 9 1 t o t a l e t e t r a s p h ä r i s c h e K o n t i n u a; und jedes einzelne Tetra-

schem $P_{3,3}\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ ist $\frac{191}{600}$ des totalen tetrasphärischen Kontinuums; folglich $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}\right) = \frac{191}{600} \cdot \frac{16}{24} = \frac{191}{900}$. Der rationale Wert dieses Orthoschems ist jetzt auf einem zwar etwas mühsamen, aber direkten Wege durch reine Konstruktion gefunden worden; auch die etwas leichtere, aber weniger direkte Art, wie dieses Orthoschem in § 33 mittelst des Eckenmasses des einfachen Hekatonkaieikosaschems bestimmt wurde, mag hieher gezählt werden. Da sonst alle übrigen rationalen Orthoscheme mit kommensurabeln Argumenten (eines ausgenommen, das wir bald nachher behandeln werden) unmittelbar aus den Konstruktionen des § 17 folgen, so lag es mir daran, auch $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}\right)$, unabhängig von dem künstlichen Verfahren in § 30, durch direkte Konstruktion zu bestimmen; und man möge es mir verzeihen, wenn dieses nicht ohne Weitläufigkeit geschehen konnte, und wenn ich sogleich noch eine zweite direkte Art, wie dasselbe Resultat durch Konstruktion erreicht werden kann, beifüge.

Denkt man sich beide Hexakosioscheme $(3, 3, 5)$ und $\left(3, 3, \frac{5}{2}\right)$ auf dieselbe Tetrasphäre projiziert, so liegen bei beiden je 5 Tetrascheme um eine gemeinschaftliche Seite herum, beim einfachen mit einmaligem, beim überschlagenen mit doppeltem Umlauf; beim einen hat also das reguläre Tetraschem das Argument $\frac{2\pi}{5}$, beim andern $\frac{4\pi}{5}$. Bezeichnen wir ihre Masse mit $S\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ und $S\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, so wissen wir bereits aus § 17, dass $S\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{600}$ des totalen tetrasphärischen Kontinuums ist; die Bestimmung von $S\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ hängt also nur noch von der Kenntnis des Verhältnisses $S\left(\frac{4\pi}{5}\right) : S\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ab, und diese kann man direkt erhalten, indem man untersucht, wie viele kleine Tetrascheme das grosse in sich schliesst.

Die Ecken des grossen können wir auf folgende Weise angeben:

$$(I)\ \Theta = 0;\ (II)\ \Theta = \frac{3\pi}{5},\ \varphi = \pi;\ (III)\ \Theta = \frac{3\pi}{5},\ \varphi = a,\ \psi = \mp \frac{2\pi}{5}.$$

Lässt man der Ordnung nach je ein Eck weg und legt durch die drei übrigen und durch das Centrum einen Raum (lineares Kontinuum), so mögen die vier Diametralräume, welche $S\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ begrenzen, durch die Gleichungen $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$, $p_4 = 0$ dargestellt sein. Wenn nun die homogenen Polynome p so eingerichtet werden, dass die Summe der Quadrate der Koeffizienten eines jeden gleich 1 ist, und dass sie sämtlich für eine innere Lösung positiv sind, so hat man in tetrasphärischen Variabeln:

$$p_1 = \cos\frac{\pi}{3}\cos\Theta + \sin\frac{\pi}{3}\sin\Theta\cos w, \quad \text{wo } \cos w = -\cos b'\cos\varphi + \sin b'\sin\varphi\cos\psi,$$
$$p_2 = \sin\Theta\left(-\sin\frac{a}{2}\cos\varphi + \cos\frac{a}{2}\sin\varphi\cos\psi\right),$$
$$p_3,\, p_4 = \sin\Theta\sin\varphi\sin\left(\frac{2\pi}{5}\mp\psi\right).$$

Da $\sin\Theta$, $\sin\varphi$ immer positiv sind, so geben die zwei letzten Polynome für eine innere Lösung die Bedingungen $-\frac{2\pi}{5} < \psi < \frac{2\pi}{5}$. Das Polynom p_2 giebt die Bedingung, dass die äquatoriale Projektion der innern Lösung auf der Halbkugel liegen müsse, deren positiver Pol $\varphi = \frac{\pi + a}{2}$, $\psi = 0$ ist und auf der Mitte einer Seite des äquatorialen Ikosaedernetzes liegt. Alle drei Bedingungen zusammen liefern ein äquatoriales Dreieck, innerhalb dessen die Projektion einer innern Lösung fallen muss, und dessen Ecken die Projektionen von II, III, IV sind. Der Mittelpunkt dieses Dreiecks ist $\varphi = \pi - b'$, $\psi = 0$; das obige w ist also der sphärische Abstand irgend einer äquatorialen Lösung von diesem Mittelpunkt; das Maximum von w findet für die drei Ecken statt und ist b'; daher ist $\cos w$ immer positiv.

Wenn also $\Theta \overline{\overline{<}} \frac{\pi}{2}$ ist, so ist p_1 immer positiv. Ueberhaupt ist p_1 der Kosinus des dritten Winkels eines Kugeldreiecks, worin die zwei Winkel $\frac{\pi}{3}$ und $\pi = \Theta$ die Seite w zwischen sich haben. Für ein konstantes Θ nimmt p_1 ab, wenn w wächst; und der Spielraum von w reicht von $w = 0$ an bis da, wo $p_1 = 0$ wird, darf aber auch nicht über $w = b'$ hinausgehen. Dieser Spielraum fängt also da an beengt zu werden, wo für $w = b'$ zugleich $p_1 = 0$ wird, verengert sich für ein abnehmendes $\pi - \Theta$ immer mehr und verschwindet endlich da, wo $p_1 = 0$ wird für $w = 0$. Aus der Anschauung des sphärischen Ikosaedernetzes ergiebt sich für jenen Anfang $\pi - \Theta = \frac{2\pi}{5}$; dieses Ende verlangt $\cos\left(\Theta - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ oder $\Theta = \frac{5\pi}{6}$. Somit ist die Grenzbedingung $p_1 \overline{\overline{>}} 0$ nur für die Zonen $\Theta = \frac{3\pi}{5}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}$ zu untersuchen.

In der Zone $\Theta = \frac{3\pi}{5}$ findet noch keine Verminderung der Ecken statt; nur fallen sie für II, III, IV in die Grenze $p_1 = 0$ hinein.

In der Zone $\Theta = \frac{2\pi}{3}$ kommen nur 10 Mitten von Ikosaederflächen in Betracht, wovon 6 paarweise auf die Seiten des begrenzenden Kugeldreiecks fallen. Es muss sein

$$\cos w \overline{\overline{>}} \operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{3} = \frac{1}{3} = -\cos b\cos b' + \sin b\sin b'\cos\frac{\pi}{5},$$

d. h. w darf nicht grösser sein als der sphärische Abstand eines jener sechs Punkte vom Mittelpunkt des genannten Kugeldreiecks. Auch hier ist also in der Zahl der Ecken noch keine Beschränkung; nur fallen die sechs genannten Punkte in die Grenze $p_1 = 0$ und zugleich paarweise auf je eine der drei übrigen Grenzen.

In der Zone $\Theta = \frac{4\pi}{5}$ muss sein $\cos w \overline{\overline{>}} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{3} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{5} = \cos b$, oder $w \overline{\overline{<}} b$. Die in dieser Zone möglichen Ecken werden also auf die drei innersten Ikosaederecken beschränkt, welche zugleich in die Grenze $p_1 = 0$ fallen.

Hier unten sind nun alle Ecken des einfachen Hexakosioschems, deren Projektionen auf oder innerhalb das grosse Tetraschem $S\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ kommen, nach der in § 17 eingeführten Bezeichnung aufgezählt. Die, welche in eine Grenzfläche, Grenzkante fallen, sind resp. mit einem, zwei übergesetzten Strichen versehen, die mit einem Eck des grossen Tetraschems zusammenfallenden mit der betreffenden römischen Ziffer.

$$a \text{ I};$$
$$b_2,\ b_{11},\ b_7,\ \overline{\overline{b_{12}}},\ \overline{\overline{b_6}},\ \overline{\overline{b_3}};$$
$$c_{11},\ c_{10},\ c_6,\ c_{16},\ \overline{c_5},\ \overline{c_1},\ \overline{c_{15}},\ \overline{c_{20}},\ \overline{c_{17}},\ \overline{c_{12}};$$
$$d_2,\ d_{11},\ d_7,\ \overline{\overline{d_{12}}},\ \overline{\overline{d_6}},\ \overline{\overline{d_3}};$$
$$e_{20},\ e_{11},\ e_{21},\ e_6,\ e_{12},\ e_{26},\ e_{30},\ e_{19},\ e_{10},\ \overline{e_1},\ \overline{e_{25}},\ \overline{e_{22}};$$
$$f_2,\ f_{11},\ f_7,\ f_{12} \text{ II},\ f_6 \text{ III},\ f_3 \text{ IV};$$
$$g_{11},\ g_{10},\ g_6,\ g_{16},\ \overline{\overline{g_5}},\ \overline{\overline{g_1}},\ \overline{g_{15}},\ \overline{\overline{g_{20}}},\ \overline{g_{17}},\ \overline{\overline{g_{12}}};$$
$$\overline{h_2},\ \overline{h_{11}},\ \overline{h_7}\ .$$

Die von diesen Ecken gebildeten Tetrascheme sind teils ganz, teils durch die Grenzen p halbiert; bei den letztern geht die Grenze immer durch eine Seite des Tetraschems und die Mitte der Gegenseite; dass es sich so verhält, und dass demnach wirklich Halbierung eintritt, ist für ein einzelnes Tetraschem nicht schwer zu beweisen; aber die Aufzählung aller einzelnen Fälle wäre zu weitläufig. Ich gebe daher sogleich die Uebersicht aller ganzen und halben Tetrascheme $S\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, in welche das vorhin beschriebene grosse Tetraschem $S\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ zerfällt.

$abbb$	4 ganze,	6 halbe		$deef$	18 ganze,	6 halbe
$bbbc$	4 „	6 „		$eeeg$	4 „	6 „
$bbcc$	9 „	3 „		$eefg$	18 „	6 „
$bccd$	21 „	—		$efgg$	21 „	—
$ccde$	21 „	—		$fggh$	15 „	6 „
$cdee$	18 „	6 „		$gghh$	3 „	6 „
$ceee$	4 „	6 „		$ghhh$	1 „	3 „

Addiert man alles zusammen, so erhält man

$$S\left(\frac{4\pi}{5}\right) = 191 \,.\, S\left(\frac{2\pi}{5}\right).$$

Es giebt noch ein Paar reciproker Polyscheme, deren Ecken mit denen des einfachen Hexakosioschems zusammenfallen. Sie entsprechen den Charakteren $\left(5, 3, \frac{5}{2}\right)$ und $\left(\frac{5}{2}, 3, 5\right)$ und mögen die zwei amphibolen Hekatonkaieikosascheme heissen. Wirklich ist $\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}}{4} > \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$. Ist nun 1 die Seite eines überschlagenen Ikosaeders $\left(3, \frac{5}{2}\right)$, so ist sein Radius $\sin\frac{\pi}{5}$; die genannte Seite ist aber zugleich Diagonale des Fünfecks des einfachen Dodekaeders (5, 3), das als Bestandteil des Umschlusses des gesuchten Polyschems auftritt; die Seite dieses Fünfecks oder die Seite des Polyschems ist also $2\sin\frac{\pi}{10}$; wenn daher a den entsprechenden tetrasphärischen Centriwinkel bezeichnet, so ist $\cos\frac{a}{2} = \sin\frac{\pi}{5} : 2\sin\frac{\pi}{10} = \cos\frac{\pi}{10}$; folglich $a = \frac{\pi}{5}$, gerade wie beim einfachen Hexakosioschem. Bei diesem kennen wir nun schon eine dodekaedrische Gruppe von Ecken; sie wurden mit c bezeichnet und lagen in der Zone $\Theta = \frac{\pi}{3}$. Der Radius der eingeschriebenen Tetrasphäre ist also halb so gross als derjenige der umschriebenen; d. h. wenn die zwei amphibolen Hekatonkaieikosascheme derselben Tetrasphäre eingeschrieben sind, wie das Oktoschem und Hekkaidekaschem, so sind sie auch mit ihnen derselben Tetrasphäre umschrieben. Jedes derselben hat 120 Ecken, 720 Seiten, 720 Fünfecke und 120 Dodekaeder.

Wir wollen nun untersuchen, wie oft der Umschluss dieses Polyschems $\left(5, 3, \frac{5}{2}\right)$ sich auf die Tetrasphäre projiziert. Ordnet man die einfachen Dodekaeder zonenweise um den Pol a, so bedeckt erstens das Dodekaeder $(c\,c\,c\ldots)$, welches diesen Pol a zum tetrasphärischen Centrum hat, denselben ringsum; zweitens kommen die 20 Dodekaeder, deren Centra die Ecken c sind, und welche um das gemeinschaftliche Eck a herum, wie die Dreiecke eines überschlagenen Ikosaeders $\left(3, \frac{5}{2}\right)$ auf einander folgen, in Betracht; sie bedecken den Pol a nur 7 mal, weil auch das $\left(3, \frac{5}{2}\right)$ einen 7fachen Mantel hat; drittens gehören die 12 Dodekaeder, welche die Ecken b zu Centren haben, hieher; jedes derselben bedeckt den Pol a ringsum. Da es nun sonst keine Dodekaeder giebt, deren Projektionen den Pol a erreichen, so wird derselbe $1 + 7 + 12 = 20$ mal bedeckt. Das Polyschem $\left(5, 3, \frac{5}{2}\right)$ projiziert sich also 20 mal auf die Tetrasphäre.

Dasselbe Resultat erhalten wir, wenn wir nachsehen, wie viele Tetraeder des $(3, 3, 5)$ auf ein Dodekaeder des $\left(5, 3, \frac{5}{2}\right)$ gehen. Wird dieses von den Ecken c gebildet, so umfasst es ganze Tetraeder, die 20 $abbb$, 20 $bbbc$, 30 $bbcc$ und die 60 halben Tetraeder $bccd$. Dass diese von den sphärischen Fünfecken des Dodekaeders wirklich halbiert werden, davon überzeugt man sich am leichtesten, wenn man eine Gruppe von je 5 um eine gemeinschaftliche Seite herum liegenden Tetraedern unter den Pol bringt; es sei dann $a b_1$ die gemeinschaftliche Kante, die Gegenkanten bilden das sphärische Fünfeck $b_2 b_3 b_4 b_5 b_6$; die Kugelfläche des letzten halbiert den Kreisbogen $a b_1 = \frac{\pi}{5}$; denn jene ist durch die Gleichung $\frac{x}{w} = \operatorname{tang} \frac{\pi}{5} \cos a = \operatorname{tang} \frac{\pi}{10}$, dieser durch die Gleichungen $y = 0$, $z = 0$ bestimmt. Wenn man also immer die tetrasphärischen Projektionen betrachtet, so ist das Tetraeder im Dodekaeder 100 mal enthalten. Da nun jenes $\frac{1}{600}$ des tetrasphärischen Kontinuums beträgt, so ist dieses $\frac{1}{6}$, und der ganze aus 120 Dodekaedern bestehende Umschluss zählt 20 tetrasphärische Kontinua. Demnach ist

$$f\left(\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}\right) = 20\, f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{45}.$$

Zum Schlusse muss ich noch bemerken, dass, obschon das Orthoschem $f\left(\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}\right)$ einen rationalen Wert hat, doch der Charakter $\left(\frac{5}{2}, 5, 3\right)$ kein echtes Polyschem darstellt, weil auch im Raume der Charakter $\left(5, \frac{5}{2}\right)$ zwar ein Gebilde, das mit dem Ikosaeder die Ecken gemein hat, aber kein echtes Polyeder darstellt. Dasselbe genügt nämlich der Bedingung $a_0 - a_1 + a_2 = 2$ nicht.

§ 35. *Ueber die Summe der Quadrate der Projektionen eines Strahls auf symmetrisch verteilte Richtungen.*

Wir werden in diesem Paragraphen Fälle kennen lernen, wo mehrere von einem gemeinschaftlichen Centrum ausgehende feste Strahlen r die Eigenschaft haben, dass nicht nur die Summe der Projektionen irgend eines beliebigen Strahles s auf alle jene festen Strahlen verschwindet, sondern dass auch das arithmetische Mittel der Quadrate der Projektionen gleich ist dem Quadrat des Strahls s, dividiert durch die Dimensionszahl der Totalität. Um diese Eigenschaft kurz bezeichnen zu können, wollen wir jene festen Strahlen r eutaktisch nennen. Von dieser Erklärung ausgehend, können wir nun folgenden Hilfssatz aussprechen:

Wenn in der n-fachen Totalität λ eutaktische Strahlen r gegeben sind, und es gehören zu jedem derselben als Axe μ seitliche Strahlen ϱ, welche

durchweg mit ihrer Axe denselben Winkel a bilden und überdies so um dieselbe geordnet sind, dass immer ihre äquatorialen Projektionen eine Gruppe von μ eutaktischen Strahlen einer $(n-1)$-fachen Totalität darstellen, so sind alle $\lambda\mu$ Strahlen ϱ zusammen eutaktisch für die n-fache Totalität.

(Unter äquatorialen Projektionen verstehe ich die Projektionen auf das zur jeweiligen Axe normale $(n-1)$-fache lineare Kontinuum, und den Winkel zwischen den äquatorialen Projektionen zweier Strahlen werde ich ihr Azimut nennen.)

Beweis. Bezeichnet φ den Winkel, den der Strahl s (von der Länge 1) mit irgend einem festen Strahl r bildet, so ist vermöge der eutaktischen Eigenschaft aller Strahlen r:

$$\Sigma \cos\varphi = 0, \quad \Sigma \cos^2\varphi = \frac{\lambda}{n}, \quad \text{also } \Sigma \sin^2\varphi = \frac{(n-1)\lambda}{n}.$$

Bedeutet ferner ψ das Azimut zwischen dem Strahl s und einem Strahl ϱ in Beziehung auf seine Axe r, so ist

$$\Sigma \cos\psi = 0, \quad \Sigma \cos^2\psi = \frac{\mu}{n-1},$$

wenn diese Summe sich nur auf die μ Strahlen ϱ, welche zu derselben Axe gehören, erstrecken. Ist nun w der wahre Winkel zwischen s und ϱ, so ist

$$\cos w = \cos a \cos\varphi + \sin a \sin\varphi \cos\psi;$$

folglich

$$\Sigma \cos w = \mu \cos a \cos\varphi, \qquad \Sigma \cos^2 w = \mu \cos^2 a \cos^2\varphi + \frac{\mu}{n-1} \sin^2 a \sin^2\varphi, \tag{1}$$

und wenn man die Summen links auf alle Strahlen φ ausdehnt, vermöge der zuerst gesetzten Gleichungen,

$$\Sigma \cos w = 0, \quad \Sigma \cos^2 w = \mu \cos^2 a \cdot \frac{\lambda}{n} + \frac{\mu}{n-1} \sin^2 a \cdot \frac{(n-1)\lambda}{n} = \frac{\lambda\mu}{n}, \tag{2}$$

was zu beweisen war.

Wir wollen nun zeigen, dass für jedes reguläre Polyschem die von seinem Centrum nach seinen Ecken gehenden Strahlen eutaktisch sind, indem wir, bei der Ebene anfangend, nach und nach immer zu einer höheren Totalität fortgehen.

I. Zweifache Totalität. Die Formeln

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \cos\left(\alpha + \frac{2i\pi}{n}\right) = 0 \text{ für } n = 2, 3, 4, \ldots, \text{ und } \sum_{i=0}^{i=n-1} \cos^2\left(\alpha + \frac{2i\pi}{n}\right) = \frac{n}{2} \text{ für } n > 2$$

sind bekannt; folglich sind die Radien jedes regulären Vielecks eutaktisch.

II. Dreifache Totalität. Dass die Summe der Projektionen eines Strahl s auf alle nach den Ecken gehenden Radien r eines regulären Polyeders verschwindet, folgt mit Ausnahme des Tetraeders bei den vier übrigen daraus, dass je zwei Radien einander entgegengesetzt sind. Beim Tetraeder kann man es daraus schliessen, dass das Centrum zugleich Schwerpunkt der Ecken ist.

Wenn μ Ecken des regulären Polyeders in einer durch den Polabstand a bestimmten Zone liegen, so sind die äquatorialen Projektionen der entsprechenden Radien ϱ offenbar eutaktisch als Radien eines regulären μ-Ecks. Sind dann φ, w die Winkel, welche ein Strahl s mit der Axe und mit einem Strahl ϱ bildet, so ist nach (1)

$$p = \Sigma \cos w = \mu \cos a \cos \varphi, \quad q = \Sigma \cos^2 a = \mu \cos^2 a \cos^2 \varphi + \frac{\mu}{2} \sin^2 a \sin^2 \varphi.$$

Diese allgemeinen Formeln wollen wir nun auf jedes einzelne reguläre Polyeder anwenden und in Bezug auf alle Zonen summieren.

1. Tetraeder. Ein Radius gehe nach dem Pol; für diesen ist $p = \cos \varphi$, $q = \cos^2 \varphi$. Die drei übrigen Radien bilden eine Zone, deren Poldistanz a durch $\cos a = -\frac{1}{3}$ bestimmt ist, also $p = -\cos \varphi$, $q = \frac{1}{3} \cos^2 \varphi + \frac{4}{3} \sin^2 \varphi$. Wird die Summe aller Projektionen mit P, die Summe ihrer Quadrate mit Q bezeichnet, so ist $P = 0$, $Q = \frac{4}{3}$.

2. Oktaeder. Die 6 Radien können als positive und negative Hälften der Axen eines rechtwinkligen Koordinatensystems aufgefasst werden. Also ist $P = 0$, $Q = 2$.

3. Ikosaeder. Für den nach dem Pol gehenden Radius ist $q = \cos^2 \varphi$. Dann kommt eine Zone, wo $\cos a = \sqrt{\frac{1}{5}}$, $\mu = 5$ ist, für diese also $q = \cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi$. Die übrigen 6 Radien sind diesen entgegengesetzt; somit $Q = 4$.

Aus den Werten von Q ist ersichtlich, dass die Radien eines jeden der drei angeführten Polyeder eutaktisch sind. Werden nun vom Centrum aus nach den Mittelpunkten der in einem Eck zusammentreffenden Vielecke Strahlen gezogen und das Eck selbst als Pol aufgefasst, so sind die äquatorialen Projektionen jener Strahlen eutaktisch. Wird das Gleiche in Beziehung auf jedes Eck wiederholt, so fallen im Mittelpunkt jedes Vielecks so viele Strahlen zusammen, als dasselbe Ecken zählt, und da alle diese nach (2) eutaktisch sind, so wird man hieraus auch leicht auf die Eutaxie des Systems schliessen, worin jeder nach dem Mittelpunkt eines Vielecks gehende Strahl nur einmal gezählt wird, d. h. auf die Eutaxie der Radien des reciproken Polyeders. Also sind auch die Radien des Hexaeders und Dodekaeders eutaktisch, und die Eutaxie ist somit für alle regulären Polyeder bewiesen.

Durch eine ähnliche Betrachtung wird man sich auch überzeugen, dass alle Strahlen, welche vom Centrum eines regulären Polyeders nach den Mitten seiner Kanten gehen, eutaktisch sind.

III. Vierfache Totalität. Wird ein Eck eines regulären Polyschems als Pol aufgefasst, so können die übrigen nach Zonen geordnet werden; und da alle zu einer Zone gehörenden Ecken sich entweder geradezu wie Ecken eines regulären Polyeders oder wie Kantenmitten eines solchen verhalten, so sind die äquatorialen Projektionen der entsprechenden Radien des Polyschems eutaktisch. Wenn daher μ, a, φ, p, q eine ähnliche Bedeutung haben wie oben, so ist

$$p = \mu \cos a \cos \varphi, \quad q = \mu \cos^2 a \cos^2 \varphi + \frac{\mu}{3} \sin^2 a \sin^2 \varphi.$$

1. Pentaschem. Für das als Pol gewählte Eck ist $p = \cos \varphi$, $q = \cos^2 \varphi$; für die 4 übrigen ist $\cos a = -\frac{1}{4}$, daher $p = -\cos \varphi$, $q = \frac{1}{4} \cos^2 \varphi + \frac{5}{4} \sin^2 \varphi$; also $P = 0$, $Q = \frac{5}{4}$.

2. Hekkaidekaschem. Die 8 Radien können als positive und negative Hälften der Axen eines orthogonalen Systems gefasst werden; also ist $Q = 2$.

Ist die Eutaxie von den Radien irgend eines regulären Polyschems bewiesen, so folgt sie vermöge (II) und (2) auch für das reciproke Polyschem. Sie ist also nun auch für das Oktoschem bewiesen.

Da das Eikosikaitetraschem die Ecken des Hekkaidekaschems mit denen des Oktoschems vereinigt, so sind auch seine Radien eutaktisch.

3. Hexakosioschem.

(*a*) $a = 0, \quad \mu = 1, \; q = \cos^2 \varphi,$

(*b*) $a = \frac{\pi}{5}, \; \mu = 12, \; q = 12 \cos^2 \frac{\pi}{5} \cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \frac{\pi}{5} \sin^2 \varphi,$

(*c*) $a = \frac{\pi}{3}, \; \mu = 20, \; q = 5,$

(*d*) $a = \frac{2\pi}{5}, \; \mu = 12, \; q = 12 \cos^2 \frac{2\pi}{5} \cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \frac{2\pi}{5} \sin^2 \varphi,$

(*e*) $a = \frac{\pi}{2}, \; \mu = 30, \; q = 10 \sin^2 \varphi.$

Die Werte von q für die Ecken (*a*), (*b*), (*c*), (*d*) sind doppelt zu nehmen wegen der entgegengesetzten Radien. Da

$$\cos^2 \frac{\pi}{5} + \cos^3 \frac{2\pi}{5} = \frac{3}{4}, \quad \sin^2 \frac{\pi}{5} + \sin^2 \frac{2\pi}{5} = \frac{5}{4}$$

ist, so wird $Q = 30 = \frac{120}{4}$. Wegen der paarweise entgegengesetzten Radien ist ohnehin $P = 0$.

Aus der Eutaxie des Hexakosioschems folgt sogleich auch diejenige des Hekatonkaieikosaschems.



IV. n-fache Totalität.

1. Reguläres $(n+1)$-Schem $(3, 3, \ldots 3, 3)$. Für das zum Pol gewählte Eck ist $p = \cos\varphi$, $q = \cos^2\varphi$; für die n übrigen ist $\cos a = -\frac{1}{n}$, also $p = -\cos\varphi$, $q = \frac{1}{n}\cos^2\varphi + \frac{n+1}{n}\sin^2\varphi$; also zuletzt $P = 0$, $Q = \frac{n+1}{n}$.

2. Reguläres $2n$-Schem $(3, 3, \ldots 3, 4)$. Alle $2n$ Radien können als positive und negative Hälften der Axen des orthogonalen Systems aufgefasst werden; also $Q = 2 = \frac{2n}{n}$.

Hieraus folgt die Eutaxie auch für das reciproke Polyschem, d. h. für das $2n$-Schem $(4, 3, 3, \ldots 3, 3)$.

Ich muss noch bemerken, dass in dem für das $(n+1)$-Schem geführten Beweise die Richtigkeit der Formel für die $(n-1)$-fache Totalität schon vorausgesetzt ward.

Wir können das Bisherige in folgenden allgemeinen Satz zusammenfassen:

Wenn in der n-fachen Totalität mehrere (mehr als zwei) von einem gemeinschaftlichen Centrum ausgehende Strahlen, welche die Einheit zur Länge haben, auf reguläre Art geordnet sind, und man projiziert sie auf irgend eine Richtung, so ist 1. die Summe aller Projektionen gleich Null, 2. das arithmetische Mittel der Quadrate dieser Projektionen gleich $\frac{1}{n}$.

Es seien $a, b, \ldots$ die n Kosinus der Winkel, welche einer der λ eutaktischen Strahlen mit den orthogonalen Axen bildet, $p, q, \ldots$ dieselben Grössen für irgend einen einzigen Strahl s, so ist

$$\Sigma(a p + b q + \cdots)^2 = \frac{\lambda}{n}.$$

Da aber $p, q, \ldots$ beliebig sind, so folgt

$$\Sigma a^2 = \frac{\lambda}{n}, \quad \Sigma b^2 = \frac{\lambda}{n}, \text{ etc.,} \quad \Sigma a b = 0, \text{ etc.}$$

Ist nun noch ein zweiter Einzelstrahl s' durch die Richtungskosinus $p', q', \ldots$ bestimmt, und Θ der Winkel zwischen den Strahlen s und s', also $\cos\Theta = p p' + q q' + \cdots$, so folgt aus dem Vorigen leicht:

$$\Sigma(a p + b q + \cdots)(a p' + b q' + \cdots) = \frac{\lambda}{n}\cos\Theta.$$

Aus dieser für eutaktische Strahlen überhaupt geltenden Formel folgt im besondern der Satz:

Wenn in der n-fachen Totalität Radien nach allen Ecken eines regulären Polyschems gehen, und man multipliziert für jeden derselben die Kosinus der Winkel, welche er mit zwei beliebig gegebenen Richtungen bildet, so ist das arithmetische Mittel aller so erhaltenen Produkte gleich dem n-ten Teile des Kosinus des von den zwei gegebenen Richtungen gebildeten Winkels.

Diesem Satz, der endliche Summen zum Gegenstand hat, ist ein ähnlicher an die Seite zu setzen, welcher den Wert eines bestimmten Integrals angiebt. Da sein Beweis von gleicher Natur mit den in § 19 geführten Rechnungen ist, so spreche ich hier nur den Satz selbst aus, ohne in jenen mich einzulassen.

Wird das totale n-sphärische Kontinuum in lauter unendlich kleine Elemente geteilt, nach jedem derselben ein Radius gezogen und das Produkt der Kosinusse der Winkel, welche dieser Radius mit zweien beliebigen festen Richtungen bildet, mit dem entsprechenden Element selbst multipliziert, so ist die Summe aller so erhaltenen Produkte gleich dem n-ten Teile des totalen sphärischen Kontinuums, multipliziert mit dem Kosinus des Winkels der zwei festen Richtungen.

Dritter Teil.

Verschiedene Anwendungen der Theorie der vielfachen Kontinuität, welche das Gebiet des Linearen und Sphärischen übersteigen.

§ 36. *Bestimmung des Centrums eines quadratischen Kontinuums.*

Aufgabe. Es sei irgend eine Gleichung zweiten Grades mit den n Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ gegeben; man soll den Ursprung so versetzen, dass die mit den ersten Potenzen der neuen Variabeln behafteten Glieder aus der Gleichung wegfallen.

Auflösung. Es seien $t_1, t_2, \dots t_n$ die Werte der Variabeln für den gesuchten Ursprung, $y_1, y_2, \dots y_n$ die neuen Variabeln und t_0 ein die Einheit bezeichnendes Symbol, durch dessen Einführung die gegebene Funktion homogen wird. Das Polynom der gegebenen Gleichung gehe in T über, wenn darin $1, x_1, x_2, \dots x_n$ durch $t_0, t_1, t_2, \dots t_n$ ersetzt werden, und es sei

$$D = y_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \cdots + y_n \frac{\partial}{\partial t_n},$$

so ist die transformierte Gleichung

$$T + D\,T + \frac{1}{2} D^2\,T = 0,$$

und die Aufgabe ist erfüllt, wenn, unabhängig von den Werten der neuen Variabeln, $D\,T = 0$ ist. Diese Bedingung zerfällt in die n linearen Gleichungen

$$\frac{\partial T}{\partial t_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t_2} = 0, \dots \quad \frac{\partial T}{\partial t_n} = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

und so viele sind im allgemeinen nötig und hinreichend, um die n Konstanten $t_1, t_2, \dots t_n$ zu bestimmen. Da die Gleichung

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial t_0} t_0 + \frac{\partial T}{\partial t_1} t_1 + \cdots + \frac{\partial T}{\partial t_n} t_n\right)$$

in identischer Weise besteht, so reduziert sich die neue Gleichung des $(n-1)$-fachen Kontinuums auf

$$\frac{1}{2}\frac{\partial T}{\partial t_0} + \frac{1}{2} D^2 T = 0. \qquad (2)$$

Ist irgend eine Lösung $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ bekannt, welche dieser Gleichung genügt, so wird nun auch die Lösung $(-y_1, -y_2, \ldots -y_n)$, worin sämtliche Werte der Variabeln den vorigen gleich und entgegengesetzt sind, genügen. Jeder durch den Ursprung gehende und vom Kontinuum begrenzte Strahl wird also durch den Ursprung halbiert. Daher soll dieser Ursprung das Centrum des $(n-1)$-fachen Kontinuums zweiten Grades heissen.

Können die Gleichungen (1) nur befriedigt werden, indem man $t_0 = 0$ setzt, oder sind sie nicht alle unter sich unabhängig, so hat das Kontinuum kein wahres Centrum.

Wenn mit dem Bestand der Gleichungen (1) zugleich auch $\frac{\partial T}{\partial t_0} = 0$ wird, so wird die Gleichung (2) in Beziehung auf die n neuen Variabeln homogen, und das Centrum selbst befindet sich im Kontinuum. Ist irgend eine andere Lösung $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ bekannt und bedeutet k einen willkürlichen Faktor, so wird auch die Lösung $(ky_1, ky_2, \ldots ky_n)$ der Gleichung (2) genügen. Da somit jeder das Centrum mit irgend einer andern Lösung des Kontinuums verbindende Strahl ganz in dasselbe hineinfällt, so möge es strahliges Kontinuum zweiten Grades heissen. Für ein solches muss demnach die Determinante der Koeffizienten aller $n+1$ abgeleiteten linearen Polynome von T verschwinden; aber dieses Merkmal ist nicht hinreichend, wenn die vorhin erwähnten Ausnahmsfälle eintreten.

§ 37. *Bestimmung der Hauptaxen.*

Es sei $f(x, y, z, \ldots)$ eine homogene Funktion zweiten Grades der n orthogonalen Variabeln $x, y, \ldots$, und $f(x, y, \ldots) = 1$ die Gleichung eines Kontinuums zweiten Grades, wo das Centrum als Ursprung angenommen ist. Eine orthogonale Transformation der Variabeln stellt $\frac{1}{2} n(n-1)$ Elemente zur Verfügung. Die Zahl der Glieder in $xy, xz, \ldots$ ist gleich gross. Daher ist es möglich, die Variabeln so orthogonal zu transformieren, dass in der Gleichung des Kontinuums die Produkte der Variabeln wegfallen, und nur die Quadrate bleiben.

Es sei $x = at + a't' + a''t'' + \cdots$, $y = bt + b't' + b''t'' + \cdots$, etc. die gesuchte orthogonale Transformation und $pt^2 + p't'^2 + p''t''^2 + \cdots = 1$ die transformierte Gleichung des Kontinuums. Es sei ferner

$$\frac{1}{2} df(x, y, \ldots) = X dx + Y dy + \cdots,$$

und wenn in den linearen Polynomen $X, Y, \ldots$ die alten Variabeln durch $a, b, \ldots$ ersetzt werden, so wollen wir sie durch $A, B, \ldots$ bezeichnen, und ähnlich mit Accenten. Dann ist

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t} = Xa + Yb + \cdots = Ax + By + \cdots = pt,$$

u. s. f. mit Accenten. Diese Gleichung schliesst in sich die n Gleichungen:

$$\begin{array}{l} Aa + Bb + Cc + \cdots = p, \\ Aa' + Bb' + Cc' + \cdots = 0, \\ Aa'' + Bb'' + Cc'' + \cdots = 0, \\ \text{etc.} \end{array}$$

Multipliziert man diese mit $a, a', a'', \ldots$ und addiert sie, ebenso mit $b, b', b'', \ldots$, u. s. f., so ergeben sich die Gleichungen

$$A - pa = 0, \quad B - pb = 0, \quad C - pc = 0, \ldots \qquad (3)$$

Diese n Gleichungen sind in Beziehung auf $a, b, c, \ldots$ homogen und linear. Man kann also die $n-1$ Verhältnisse dieser Richtungskosinus eliminieren und wird eine Gleichung n-ten Grades $P = 0$ erhalten, in der die einzige Unbekannte p vorkommt. Es sei p eine Wurzel dieser Gleichung, so wird dieser im allgemeinen nur ein System von Richtungskosinussen $a, b, c, \ldots$ entsprechen; und die in Beziehung auf die einzelnen Elemente der Determinante P abgeleiteten Funktionen derselben werden mit $a^2, ab, ac, \ldots$; $ab, b^2, bc, \ldots$; $ac, bc, c^2, \ldots$; $\ldots$ proportional sein. Wenn also $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die in die Diagonale fallenden abgeleiteten Funktionen der Determinante bezeichnen, so ist

$$a^2 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \gamma + \cdots}, \quad b^2 = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma + \cdots}, \quad c^2 = \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \cdots}, \ldots$$

Für eine zweite von p verschiedene Wurzel p_1 der Gleichung $P = 0$ mögen $a, b, c, \ldots$, $A, B, \ldots$ in $a_1, b_1, \ldots, A_1, B_1, \ldots$ übergehen, so ist auch

$$A_1 = p_1 a_1, \quad B_1 = p_1 b_1, \quad C_1 = p_1 c_1, \ldots$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit $a, b, c, \ldots$ und addiert sie, so ergiebt sich

$$p_1(aa_1 + bb_1 + cc_1 + \cdots) = A_1 a + B_1 b + \cdots = Aa_1 + Bb_1 + \cdots = p(aa_1 + bb_1 + \cdots)$$

oder

$$(p - p_1)(aa_1 + bb_1 + cc_1 + \cdots) = 0;$$

folglich

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 + \cdots = 0. \qquad (4)$$

Wäre p imaginär, so könnte p_1 die konjugierte Wurzel sein; dann wären auch a, a_1; b, b_1; ... konjugiert, und daher könnte keines der Produkte $a a_1$, bb_1, ... negativ sein, was der Gleichung (4) widerspricht. Die Gleichung $P = 0$ hat also lauter reelle Wurzeln.

Die Elemente der Determinante P seien $\binom{1}{1}, \binom{1}{2}, \binom{1}{3}, \ldots \binom{1}{n}$, etc., wo immer $\binom{h}{i} = \binom{i}{h}$, und, abgesehen von dieser Gleichheit je zweier in Beziehung auf die Diagonale gleichliegender Elemente, sei

$$\frac{\partial P}{\partial \binom{1}{\alpha}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}, \frac{\partial^2 P}{\partial \binom{1}{\alpha} \; \partial \binom{2}{\beta}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}, \text{ etc.}$$

Da nun $\dfrac{\partial \binom{\alpha}{\alpha}}{\partial p} = -1$ ist, so folgt leicht, wenn P als Funktion von p aufgefasst und $P(p + w)$ nach steigenden Potenzen des Inkrements w entwickelt wird,

$$P(p + w) = P(p) - w\Sigma\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} + w^2\Sigma\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} - w^3\Sigma\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} + \cdots + (-w)^n \ldots \quad (5)$$

Hat nun die Gleichung $P(p) = 0$ nicht lauter ungleiche Wurzeln, und bezeichnet z. B. p eine Wurzel, welche m mal vorkommt, so behaupte ich, dass für diesen Wert von p alle $(m-1)$-ten abgeleiteten Funktionen von P (bloss formell verstanden, wie wenn sämtliche n^2 Elemente der Determinante P von einander unabhängig wären) verschwinden müssen. Zunächst ist nämlich klar, dass auf der rechten Seite der Gleichung (5) die Koeffizienten von $w^0, w^1, w^2, \ldots w^{m-1}$ verschwinden müssen; und es soll gezeigt werden, dass daraus das Verschwinden aller $(m-1)$-ten Abgeleiteten der Determinante P mit Notwendigkeit folgt. Ist dieses für $m - 1$ gleiche Wurzeln schon geschehen, so kann man auch ferner beweisen, dass es für m gleiche Wurzeln gilt. Um nicht weitläufig zu werden, wollen wir $m = 4$ setzen; das allgemeine ist aus diesem besondern Fall leicht zu entnehmen. Da, wenn die Behauptung für $m = 3$ richtig ist, die zweiten Abgeleiteten von P einzeln verschwinden, so kann man setzen:

$$\begin{aligned}
\binom{1}{i} &= \lambda_4 \binom{4}{i} + \lambda_5 \binom{5}{i} + \cdots + \lambda_n \binom{n}{i}, \\
\binom{2}{i} &= \mu_4 \binom{4}{i} + \mu_5 \binom{5}{i} + \cdots + \mu_n \binom{n}{i}, \\
\binom{3}{i} &= \nu_4 \binom{4}{i} + \nu_5 \binom{5}{i} + \cdots + \nu_n \binom{n}{i},
\end{aligned}$$

wofern nur nicht alle dritten Abgeleiteten der Determinante P auch verschwinden (in welchem Falle übrigens das zu Beweisende schon statt hätte). Dann ist, wenn die Zeiger α, β, γ von 1, 2, 3 verschieden sind,

$$\begin{bmatrix}2\,3\,\alpha\\2\,3\,\alpha\end{bmatrix} = \lambda_\alpha{}^2 \cdot \begin{bmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{bmatrix}, \text{ etc.,} \quad \begin{bmatrix}1\,\alpha\,\beta\\1\,\alpha\,\beta\end{bmatrix} = \begin{vmatrix}\mu_\alpha \cdot \mu_\beta\\ \nu_\alpha \cdot \nu_\beta\end{vmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{bmatrix}, \text{ etc.}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha\,\beta\,\gamma\\\alpha\,\beta\,\gamma\end{bmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda_\alpha \cdot \lambda_\beta \cdot \lambda_\gamma\\ \mu_\alpha \cdot \mu_\beta \cdot \mu_\gamma\\ \nu_\alpha \cdot \nu_\beta \cdot \nu_\gamma\end{vmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{bmatrix}, \text{ etc.;}$$

also

$$\Sigma \begin{bmatrix}\alpha\,\beta\,\gamma\\\alpha\,\beta\,\gamma\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{bmatrix} \Big\{1 + \lambda_4^2 + \lambda_5^2 + \cdots + \lambda_n^2 + \mu_4^2 + \mu_5^2 + \cdots + \mu_n^2 + \nu_4^2 + \nu_5^2 + \cdots + \nu_n^2$$
$$+ \begin{vmatrix}\mu_4 \cdot \mu_5\\ \nu_4 \cdot \nu_5\end{vmatrix}^2 + \text{etc.} + \begin{vmatrix}\lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6\\ \mu_4 \cdot \mu_5 \cdot \mu_6\\ \nu_4 \cdot \nu_5 \cdot \nu_6\end{vmatrix}^2 + \text{etc.}\Big\}.$$

Diese Formeln gelten für drei gleiche Wurzeln. Sind vier gleiche vorhanden, so muss die Summe $\Sigma \begin{bmatrix}\alpha\,\beta\,\gamma\\\alpha\,\beta\,\gamma\end{bmatrix}$, wo jetzt α, β, γ beliebige Zeiger mit Einschluss von 1, 2, 3 bedeuten, gleich Null sein. Da aber im vorigen Ausdruck für dieselbe das mit ihrem ersten Gliede $\begin{bmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{bmatrix}$ multiplizierte Aggregat aus lauter Quadraten besteht, von denen eines 1 ist, so kann dieses Aggregat nicht verschwinden; weshalb notwendig der andere Faktor, das erste Glied $\begin{bmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{bmatrix}$ der Summe, verschwindet. Das gleiche kann aber auch von jedem andern einzelnen Gliede der Summe $\Sigma \begin{bmatrix}\alpha\,\beta\,\gamma\\\alpha\,\beta\,\gamma\end{bmatrix}$ gezeigt werden. Aus $\begin{bmatrix}1\,2\,3\\1\,2\,3\end{bmatrix} = 0$ folgt, dass man setzen darf:

$$\binom{4}{i} = \xi_5 \binom{5}{i} + \xi_6 \binom{6}{i} + \cdots + \xi_n \binom{n}{i}, \quad [i = 4, 5, 6, \ldots n], \quad . \; . \; . \quad (6)$$

sobald nur nicht alle $\begin{vmatrix}1\,2\,3\,4\\1\,2\,3\,i\end{vmatrix}$ verschwinden, was man immer wird vermeiden können, wenn ausser den vier ersten Elementenreihen nicht auch noch die fünfte von den übrigen abhängt (in welchem Falle alle vierten Abgeleiteten der Determinante P verschwänden, also fünf gleiche Wurzeln vorhanden wären). Multipliziert man mit λ_i und summiert nach $i = 4, 5, \ldots n$, so erhält man

$$\binom{4}{1} = \xi_5 \binom{5}{1} = \xi_6 \binom{6}{1} + \cdots + \xi_n \binom{n}{1},$$

ähnliche Ausdrücke für $\binom{4}{2}$, $\binom{4}{3}$. Die Formel (6) gilt also für $i = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots n$. Da somit jede der vier ersten Horizontalreihen in ihrer ganzen Ausdehnung von den

übrigen abhängt, so müssen alle Determinanten, welche durch Weglassung von drei Horizontalreihen entstehen, verschwinden, d. h. alle dritten Abgeleiteten von P. Wenn also obige Behauptung für $m = 3$ richtig ist, so gilt sie auch für $m = 4$; und es ist leicht, diesen Beweis zu verallgemeinern.

Wenn demnach eine m-fache Wurzel p der Gleichung $P = 0$ im Systeme (3) substituiert wird, so werden m seiner Gleichungen von den übrigen abhängig. Man kann daher m unter sich unabhängige Gruppen von Verhältnissen:

$$a_1 : b_1 : c_1 : \ldots, \quad a_2 : b_2 : c_2 : \ldots, \quad \ldots, \quad a_m : b_m : c_m : \ldots.$$

angeben, deren jede dem System (3) genügt. Dann wird aber auch jede Gruppe

$$(\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_m a_m) : (\varepsilon_1 b_1 + \varepsilon_2 b_2 + \cdots + \varepsilon_m b_m) : \ldots,$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_m$ willkürliche Faktoren bezeichnen, genügen. So wie nun jeder einfachen Wurzel der Gleichung $P = 0$ ein durch die Richtungskosinus $a, b, c, \ldots$ bestimmter Strahl als Hauptaxe entspricht, so wird demnach jeder m-fachen Wurzel ein m-faches lineares Kontinuum, bestimmt durch jene m unter sich unabhängigen Lösungen des Systems (3), entsprechen; und wie man auch innerhalb dieses Kontinuums m orthogonale Axen wählen mag, so kann man sie immer als Hauptaxen des gegebenen quadratischen Kontinuums auffassen.

Setzt man in der transformierten Gleichung

$$p t^2 + p' t'^2 + p'' t''^2 + \cdots = 1$$

$t' = t'' = \cdots = 0$, so erhält man $t = \frac{1}{\sqrt{p}}$ als absoluten Wert der betreffenden Hauptaxe. Ist p positiv, so wird die Axe der t zu beiden Seiten in gleichen Abständen vom Centrum durch das quadratische Kontinuum reell begrenzt; die Lösungen, in denen dieses geschieht, mögen Hauptscheitel des Kontinuums heissen. — Die Wurzeln der Gleichung $P = 0$ sind die umgekehrten Werte der Quadrate der Hauptaxen des quadratischen Kontinuums. Dieses hat also so viele imaginäre Hauptaxen, als die Gleichung $P = 0$ negative Wurzeln. Soll das quadratische Kontinuum reelle Lösungen enthalten, so dürfen nicht sämtliche Wurzeln p negativ sein. Je nachdem nun die Zahl der negativen Wurzeln $0, 1, 2, \ldots n - 1$ ist, kann man n Gattungen von quadratischen Kontinuen unterscheiden.

§ 38. *Konjugierte Halbmesser.*

Die auf Hauptaxen und Centrum bezogene Gleichung des quadratischen Kontinuums sei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \cdots + \frac{w^2}{d^2} = 1,$$

wo die Axen $a, b, \ldots d$ teils reell, teils rein imaginär sind. Es sei ferner $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$; ... ein orthogonales System von Richtungskosinussen, und $t, t', t'', \ldots$ seien neue Variabeln eines schiefen Systems, in welche die alten übergehen durch die Relationen

$$\frac{x}{a} = \alpha \frac{t}{h} + \alpha' \frac{t'}{h'} + \alpha'' \frac{t''}{h''} + \cdots, \quad \frac{y}{b} = \beta \frac{t}{h} + \beta' \frac{t'}{h'} + \beta'' \frac{t''}{h''} + \cdots, \text{ etc.},$$

so ist die transformierte Gleichung des quadratischen Kontinuums

$$\frac{t^2}{h^2} + \frac{t'^2}{h'^2} + \frac{t''^2}{h''^2} + \cdots = 1,$$

und $h, h', h'', \ldots$ sind die Werte der **konjugierten Halbmesser** oder schiefen Axen des neuen Systems. Sind $\lambda, \mu, \nu, \ldots$; $\lambda', \mu', \nu', \ldots$; etc. die Richtungskosinus der konjugierten Halbmesser, so muss sein

$$x = \lambda t + \lambda' t' + \lambda'' t'' + \cdots, \quad y = \mu t + \mu' t' + \mu'' t'' + \cdots, \text{ etc.}$$

woraus folgt

$$\alpha = \frac{h\lambda}{a}, \ \beta = \frac{h\mu}{b}, \ \gamma = \frac{h\nu}{c}, \cdots; \ \alpha' = \frac{h'\lambda'}{a}, \ \beta' = \frac{h'\mu'}{b}, \cdots; \text{ etc.}$$

Die einzigen Bedingungen, durch welche Richtungen und Werte der konjugierten Halbmesser von einander abhängen, sind also folgende:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda\lambda'}{a^2} + \frac{\mu\mu'}{b^2} + \frac{\nu\nu'}{c^2} + \cdots = 0, \text{ etc.} \\ \frac{1}{h^2} = \frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\nu^2}{c^2} + \cdots, \ \frac{1}{h'^2} = \frac{\lambda'^2}{a^2} + \frac{\mu'^2}{b^2} + \cdots, \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

Da überdies noch $\lambda^2 + \mu^2 + \cdots = 1$, $\lambda'^2 + \mu'^2 + \cdots = 1$, etc. ist, so enthält das System der konjugierten Halbmesser nur $\frac{1}{2} n (n-1)$ freie Grössen. Es ist auch

$$\left.\begin{aligned} a^2 = h^2\lambda^2 + h'^2\lambda'^2 + h''^2\lambda''^2 + \cdots, \ b^2 = h^2\mu^2 + h'^2\mu'^2 + h''^2\mu''^2 + \cdots, \text{ etc.} \\ h^2\lambda\mu + h'^2\lambda'\mu' + h''^2\lambda''\mu'' + \cdots = 0, \text{ etc.} \end{aligned}\right\} (2)$$

Ist $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2} < \cdots < \frac{1}{d^2}$, so ist jedes $\frac{1}{h^2}, \frac{1}{h'^2}, \frac{1}{h''^2}, \ldots$ zwischen dem Minimum $\frac{1}{a^2}$ und dem Maximum $\frac{1}{d^2}$ enthalten. Ist ferner jenes negativ, dieses positiv, so kann z. B. $\frac{1}{h^2}$ den Nullwert passieren. Setzt man aber $a^2, b^2, \ldots d^2$ sämtlich als endlich voraus, so ist aus den Gleichungen (2) klar, dass dieses nicht geschehen kann, ohne dass zugleich

wenigstens noch ein reciprokes Halbmesserquadrat z. B. $\frac{1}{h'^2}$, durch Null geht. Bleiben bei diesem Uebergang alle andern Halbmesserquadrate endlich, so hat man annähernd: $h^2\lambda^2 + h'^2\lambda'^2 = 0$, $h^2\mu^2 + h'^2\mu'^2 = 0$, etc., und durch Addition dieser Gleichungen: $h^2 + h'^2 = 0$; ferner $h^2\lambda\mu + h'^2\lambda'\mu' = 0$, etc.; also annähernd $\lambda^2 = \lambda'^2$, $\mu^2 = \mu'^2$, etc., $\lambda\mu = \lambda'\mu'$, etc., woraus $\lambda : \mu : \nu : \ldots = \lambda' : \mu' : \nu' : \ldots$ folgt. Wenn also ein reciprokes Halbmesserquadrat unendlich klein wird, so muss wenigstens noch eines zugleich unendlich klein werden, und wenn dann alle übrigen endlich bleiben, so sind die unendlich grossen Werte dieser zwei Halbmesserquadrate gleich und entgegengesetzt, und ihre Richtungen fallen unendlich nahe zusammen. Es scheint nun im allgemeinen immer möglich, ein System konjugierter Halbmesser von reeller Richtung allmählich durch eben solche Systeme hindurch in irgend ein anderes gegebenes System reeller konjugierter Richtungen überzuführen und dabei zu vermeiden, dass je mehr als zwei Halbmesser zugleich unendlich werden. Da nun bei jedem Durchgang bloss zweier Halbmesserquadrate durchs Unendliche beide vorher entgegengesetzt gewesen sind und nachher ihre Zeichen gewechselt haben, und da sonst kein Halbmesserquadrat sein Zeichen wechseln kann, so scheint es im allgemeinen unmöglich, dass in zwei Systemen konjugierter Halbmesserquadrate die Anzahl der negativen Quadrate verschieden sei. Um dieses noch strenger zu beweisen, schicke ich folgenden leichten Hilfssatz voran:

Sind in der n-fachen Totalität nur m konjugierte Halbmesser eines quadratischen Kontinuums (oder auch nur das durch dieselben gelegte m-fache lineare Kontinuum) gegeben, so ist dadurch das $(n - m)$-fache lineare Kontinuum, welches die $n - m$ übrigen konjugierten Halbmesser enthält, schon bestimmt; aber innerhalb desselben können diese übrigen Halbmesser gerade mit derselben Freiheit gewählt werden, wie wenn überhaupt nur $n - m$ Variabeln in der quadratischen Gleichung vorkommen. Man kann daher sagen, in Beziehung auf ein gegebenes quadratisches Kontinuum in der n-fachen Totalität sei einem diametralen m-fachen linearen Kontinuum immer ein bestimmtes $(n - m)$-faches lineares Kontinuum konjugiert.

Beweis. Ist $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + \cdots = 1$ die auf Centrum und Hauptaxen bezogene quadratische Gleichung, und ist ein diametrales m-faches lineares Kontinuum durch die Richtungen $(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$, $(\lambda', \mu', \nu', \ldots)$, etc. bestimmt, so wird jeder demselben angehörende Strahl durch die Projektionen $\Theta\lambda + \Theta'\lambda' + \Theta''\lambda'' + \cdots$, $\Theta\mu + \Theta'\mu' + \Theta''\mu'' + \cdots$, etc. dargestellt, wo $\Theta, \Theta', \Theta'', \ldots$ ganz beliebige reelle Faktoren bezeichnen. Sind nun $l, m, n, \ldots$ die Projektionen irgend eines dem letzten konjugierten Strahls, so muss die Bedingung

$$A(\Theta\lambda + \Theta'\lambda' + \Theta''\lambda'' + \cdots)\,l + B(\Theta\mu + \Theta'\mu' + \Theta''\mu'' + \cdots)\,m + \text{etc.} = 0$$

erfüllt sein. Soll aber dieses unabhängig von den m Faktoren $\Theta, \Theta', \ldots$ geschehen, so zerfällt die letzte Gleichung in m einzelne Gleichungen, welche ein diametrales

$(n-m)$-faches lineares Kontinuum darstellen, welches alle dem gegebenen m-fachen linearen Kontinuum konjugierte Strahlen enthält.

Satz. In jedem System konjugierter Halbmesser eines Kontinuums zweiten Grades sind immer so viele negative Halbmesserquadrate als negative Hauptaxenquadrate. — Oder: Wenn n reelle Grössen $A, B, C \ldots$ gegeben sind, und n Gruppen von je n Grössen $(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$, $(\lambda', \mu', \nu', \ldots)$, etc. den $\frac{1}{2} n(n-1)$ Bedingungen $A\lambda\lambda' + B\mu\mu' + C\nu\nu' + \cdots = 0$, etc. genügen, so sind unter den n Grössen $A\lambda^2 + B\mu^2 + C\nu^2 + \cdots$, $A\lambda'^2 + B\mu'^2 + C\nu'^2 + \cdots$, etc. immer eben so viele negative, wie unter den gegebenen Grössen $A, B, C, \ldots$

Beweis. Zwischen das System der Hauptaxen $a, b, c, \ldots$ und dasjenige der konjugierten Halbmesser $h, h', h'', \ldots$ kann man immer zwei Systeme konjugierter Halbmesser einschalten, welche unter sich $n-2$ Halbmesser gemein haben, und von denen das eine mit dem Hauptaxensystem z. B. den Halbmesser a, das andere mit dem gegebenen Systeme konjugierter Halbmesser z. B. den Halbmesser h gemein hat. Denn a und h bestimmen ein zweifaches lineares Kontinuum, welchem das durch die zwei Gleichungen $x = 0$, $B\mu y + C\nu z + \cdots = 0$ dargestellte $(n-2)$-fache lineare Kontinuum konjugiert ist. In diesem wähle man nach Belieben die konjugierten Halbmesser $k_1, k_2, \ldots k_{n-2}$. Im zweifachen Kontinuum seien die Halbmesser a, $\mathfrak{a}$ und h, $\mathfrak{h}$ konjugierte Paare. Dann hat man folgende Reihe von 4 Systemen konjugierter Halbmesser:

$$(a, b, c, \ldots), \quad (a, \mathfrak{a}, k_1, k_2, \ldots k_{n-2}), \quad (h, \mathfrak{h}, k_1, \ldots k_{n-2}), \quad (h, h', h'', \ldots).$$

Für eine Kurve zweiten Grades ist nun der Satz bekannt; also sind in den Systemen $(a, \mathfrak{a})$ und $(h, \mathfrak{h})$ gleich viele negative Halbmesserquadrate. Nehmen wir nun an, der Satz sei für $n-1$ Dimensionen bereits bewiesen, so enthalten auch die Systeme $(b, c, \ldots)$ und $(\mathfrak{a}, k_1, k_2, \ldots k_{n-2})$ gleich viele negative Halbmesserquadrate, ebenso die Systeme $(\mathfrak{h}, k_1, k_2, \ldots k_{n-2})$ und $(h', h'', \ldots)$. Also müssen auch die gegebenen Systeme $(a, b, c, \ldots)$ und $(h, h', h'', \ldots)$ gleich viele negative Halbmesserquadrate enthalten. Da nun der Satz für $n = 2$ gilt, so gilt er auch für $n = 3$, deshalb auch für $n = 4$, u. s. f.; also gilt er allgemein.

Wenn wir der Kürze wegen jedes durch m Hauptaxen gelegte m-fache lineare Kontinuum einen m-fachen Hauptschnitt des gegebenen quadratischen Kontinuums von n Dimensionen nennen, so gilt folgender

Satz. Werden alle m-fachen Paralleloscheme, welche aus den konjugierten Halbmessern irgend eines Systems gebildet werden können, auf einen oder auf zwei verschiedene m-fache Hauptschnitte projiziert, so ist

im ersten Falle die Summe der Quadrate der Projektionen gleich dem Quadrate des Produkts der m Hauptaxen des betreffenden Hauptschnitts, und im zweiten Falle ist die Summe der Produkte je zweier gleichnamiger Projektionen gleich Null.

Beweis. Nimmt man z. B. $m = 3$ an, so ist vermöge der Gleichungen (2) und nach Sätzen, die aus der Theorie der Determinante bekannt sind:

$$a^2 b^2 c^2 = \begin{vmatrix} h^2\lambda^2 + h'^2\lambda'^2 + \cdots, & h^2\lambda\mu + h'^2\lambda'\mu' + \cdots, & h^2\lambda\nu + h'^2\lambda'\nu' + \cdots \\ h^2\mu\lambda + h'^2\mu'\lambda' + \cdots, & h^2\mu^2 + h'^2\mu'^2 + \cdots, & h^2\mu\nu + h'^2\mu'\nu' + \cdots \\ h^2\nu\lambda + h'^2\nu'\lambda' + \cdots, & h^2\nu\mu + h'^2\nu'\mu' + \cdots, & h^2\nu^2 + h'^2\nu'^2 + \cdots \end{vmatrix}$$

$$= \left\| \begin{matrix} \lambda \,.\, \lambda' \,.\, \lambda'' \,.\, \lambda''' \,.\,.\,.\,.\,. \\ \mu \,.\, \mu' \,.\, \mu'' \,.\, \mu''' \,.\,.\,.\,.\,. \\ \nu \,.\, \nu' \,.\, \nu'' \,.\, \nu''' \,.\,.\,.\,.\,. \end{matrix} \middle| \begin{matrix} h^2\lambda \,.\, h'\lambda' \,.\, h''^2\lambda'' \,.\, h'''^2\lambda''' \,.\,.\,.\,. \\ h^2\mu \,.\, h'^2\mu' \,.\, h''^2\mu'' \,.\, h'''^2\mu''' \,.\,.\,.\,. \\ h^2\nu \,.\, h'^2\nu' \,.\, h''^2\nu'' \,.\, h'''^2\nu''' \,.\,.\,.\,. \end{matrix} \right\|$$

$$= \Sigma\, h^2 h'^2 h''^2 \begin{vmatrix} \lambda \,.\, \lambda' \,.\, \lambda'' \\ \mu \,.\, \mu' \,.\, \mu'' \\ \nu \,.\, \nu' \,.\, \nu'' \end{vmatrix}^2,$$

wo die durch Σ bezeichnete Summe sich auf alle Kombinationen dritter Klasse, welche aus den n konjugierten Halbmessern $h, h', h'', h''', \ldots$ gebildet werden können, erstreckt. Da nun der Ausdruck

$$h\,h'\,h'' \begin{vmatrix} \lambda \,.\, \lambda' \,.\, \lambda'' \\ \mu \,.\, \mu' \,.\, \mu'' \\ \nu \,.\, \nu' \,.\, \nu'' \end{vmatrix}$$

z. B. die Projektion des von den Halbmessern h, h', h'' gebildeten dreifachen Paralleloschems auf den Hauptschnitt $(a\,b\,c)$ darstellt, so ist hiemit der erste Teil des Satzes bewiesen.

Wird dasselbe Paralleloschem $(h\,h'\,h'')$ auf die Hauptschnitte $(a\,b\,c)$ und $(a\,b\,d)$ projiziert, so ist das Produkt der Projektionen

$$h\,h'\,h'' \begin{vmatrix} \lambda \,.\, \lambda' \,.\, \lambda'' \\ \mu \,.\, \mu' \,.\, \mu'' \\ \nu \,.\, \nu' \,.\, \nu'' \end{vmatrix} \times h\,h'\,h'' \begin{vmatrix} \lambda \,.\, \lambda' \,.\, \lambda'' \\ \mu \,.\, \mu' \,.\, \mu'' \\ \xi \,.\, \xi' \,.\, \xi'' \end{vmatrix}$$

und die auf alle Kombinationen der n Halbmesser $h, h', h'', \ldots$ sich erstreckende Summe solcher Produkte

$$\Sigma h^2 h'^2 h''^2 \begin{vmatrix} \lambda . \lambda' . \lambda'' \\ \mu . \mu' . \mu'' \\ \nu . \nu' . \nu'' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \lambda . \lambda' . \lambda'' \\ \mu . \mu' . \mu'' \\ \xi . \xi' . \xi' \end{vmatrix}$$

$$= \left\| \begin{matrix} \lambda . \lambda' . \lambda'' . \lambda''' . \ldots . \\ \mu . \mu' . \mu'' . \mu''' . \ldots . \\ \nu . \nu' . \nu'' . \nu''' . \ldots . \end{matrix} \middle| \begin{matrix} h^2\lambda . h'^2\lambda' . h''^2\lambda'' . h'''^2\lambda''' . \ldots . \\ h^2\mu . h'^2\mu' . h''^2\mu'' . h'''^2\mu''' . \ldots . \\ h^2\xi . h'^2\xi' . h''^2\xi'' . h'''^2\xi''' . \ldots . \end{matrix} \right\|$$

$$= \begin{vmatrix} h^2\lambda^2 + h'^2\lambda'^2 + \cdots, & h^2\mu\lambda + h'^2\mu'\lambda' + \cdots, & h^2\nu\lambda + h'^2\nu'\lambda' + \cdots \\ h^2\lambda\mu + h'^2\lambda'\mu' + \cdots, & h^2\mu^2 + h'^2\mu'^2 + \cdots, & h^2\nu\mu + h'^2\nu'\mu' + \cdots \\ h^2\lambda\xi + h'^2\lambda'\xi' + \cdots, & h^2\mu\xi + h'^2\mu'\xi' + \cdots, & h^2\nu\xi + h'^2\nu'\xi' + \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 . 0 . 0 \\ 0 . b^2 . 0 \\ 0 . 0 . 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Es wird kaum nötig sein, dem hier behandelten Fall, wo die zwei Hauptschnitte, auf welche projiziert ward, zwei Hauptaxen gemein hatten, noch Beispiele der zwei übrigen Fälle, wo die Hauptschnitte entweder nur eine oder gar keine Hauptaxe gemein haben, beizufügen. Wir können demnach den zweiten Teil des Satzes für $m = 3$ als bewiesen ansehen. Wenn wir endlich auch, um in der schriftlichen Darstellung Raum zu ersparen, den ganzen Satz nur für $m = 3$ bewiesen haben, so ist doch die Verallgemeinerung des gebrauchten Verfahrens klar genug.

Erste Folgerung. **Die Summe der Quadrate der orthogonalen Projektionen aller aus den konjugierten Halbmessern eines Systems gebildeten m-fachen Paralleloscheme auf irgend ein gegebenes m-faches lineares Kontinuum ist konstant.**

Denn, wenn z. B. $m = 3$ ist, und $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1, \ldots)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2, \ldots)$, $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3, \delta_3, \ldots)$ sind die Kosinus dreier unter sich orthogonaler Richtungen, durch welche das gegebene dreifache lineare Kontinuum bestimmt wird, so ist z. B. die Projektion des Paralleloschems $(h h' h'')$ auf dieses Kontinuum

$$h h' h'' \begin{vmatrix} \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 + \cdots, & \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 + \cdots, & \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3 + \cdots \\ \lambda'\alpha_1 + \mu'\beta_1 + \cdots, & \lambda'\alpha_2 + \mu'\beta_2 + \cdots, & \lambda'\alpha_3 + \mu'\beta_3 + \cdots \\ \lambda''\alpha_1 + \mu''\beta_1 + \cdots, & \lambda''\alpha_2 + \mu''\beta_2 + \cdots, & \lambda''\alpha_3 + \mu''\beta_3 + \cdots \end{vmatrix}$$

$$= h h' h'' \begin{vmatrix} \lambda . \mu . \nu \\ \lambda' . \mu' . \nu' \\ \lambda'' . \mu'' . \nu'' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha_1 . \beta_1 . \gamma_1 \\ \alpha_2 . \beta_2 . \gamma_2 \\ \alpha_3 . \beta_3 . \gamma_3 \end{vmatrix} + h h' h'' \begin{vmatrix} \lambda . \mu . \xi \\ \lambda' . \mu' . \xi' \\ \lambda'' . \mu'' . \xi'' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha_1 . \beta_1 . \delta_1 \\ \alpha_2 . \beta_2 . \delta_2 \\ \alpha_3 . \beta_3 . \delta_3 \end{vmatrix} + \text{etc.}$$

Bezeichnet nun Σ eine Summe, welche sich auf alle Kombinationen $h h' h''$, S dagegen eine solche, die sich auf alle Kombinationen $a\, b\, c$ der Hauptaxen oder auch auf alle binären Verbindungen von zweien dieser Kombinationen erstreckt, so ist

Σ (Quadrat der obigen Projektion des Paralleloschems)

$$= S\left\{ \begin{vmatrix} \alpha_1 . \beta_1 . \gamma_1 \\ \alpha_2 . \beta_2 . \gamma_2 \\ \alpha_3 . \beta_3 . \gamma_3 \end{vmatrix}^2 . \Sigma \left(h\, h'\, h'' \begin{vmatrix} \lambda\ .\ \mu\ .\ \nu \\ \lambda'\ .\ \mu'\ .\ \nu' \\ \lambda''.\ \mu''.\ \nu'' \end{vmatrix} \right)^2 \right\}$$

$$+ 2\, S\left\{ \begin{vmatrix} \alpha_1 . \beta_1 . \gamma_1 \\ \alpha_2 . \beta_2 . \gamma_2 \\ \alpha_3 . \beta_3 . \gamma_3 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \alpha_1 . \beta_1 . \delta_1 \\ \alpha_2 . \beta_2 . \delta_2 \\ \alpha_3 . \beta_3 . \delta_3 \end{vmatrix} . \Sigma\, h^2 h'^2 h''^2 \begin{vmatrix} \lambda\ .\ \mu\ .\ \nu \\ \lambda'\ .\ \mu'\ .\ \nu' \\ \lambda''.\ \mu''.\ \nu'' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \lambda\ .\ \mu\ .\ \xi \\ \lambda'\ .\ \mu'\ .\ \xi' \\ \lambda''.\ \mu''.\ \xi'' \end{vmatrix} \right\}$$

$$= S\, a^2 b^2 c^2 \begin{vmatrix} \alpha_1 . \beta_1 . \gamma_1 \\ \alpha_2 . \beta_2 . \gamma_2 \\ \alpha_3 . \beta_3 . \gamma_3 \end{vmatrix}^2 .$$

Da der letzte Ausdruck von den Richtungen der konjugierten Halbmesser unabhängig ist, so ist die Behauptung bewiesen.

Zweite Folgerung. Die Summe der Quadrate aller m-fachen aus den konjugierten Halbmessern eines Systems gebildeten Paralleloscheme ist gleich, wie wenn das System von den Hauptaxen gebildet wird.

Wird nämlich das Quadrat eines jeden der zuerst genannten Paralleloscheme nach § 12 der Summe der Quadrate seiner Projektionen auf alle m-fachen Hauptschnitte gleich gesetzt, und kehrt man dann in der so entstandenen Doppelsumme die Ordnung der Summationen um, so folgt die Richtigkeit der Behauptung sogleich aus dem ersten Teil des vorhergehenden Lehrsatzes.

§ 39. *Berührende Kontinua ersten Grades.*

Wenn ein lineares Kontinuum eine Lösung und die derselben entsprechende erste Differentialgleichung mit einem höhern Kontinuum gemein hat, so ist jenes das Tangentialkontinuum für diese Lösung. Ist

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} + \cdots = 1$$

die Gleichung eines quadratischen Kontinuums, so ist für die Lösung $(x, y, z, \ldots)$ die Gleichung des Tangentialkontinuums

$$\frac{x\,x'}{A} + \frac{y\,y'}{B} + \frac{z\,z'}{C} + \cdots = 1,$$

wo die Variabeln $x', y', z', \ldots$ dem letzten linearen Kontinuum angehören. Dem vom Centrum nach der Lösung $(x, y, \ldots)$ hin gehenden Halbmesser h ist das diametrale Kontinuum, dessen Gleichung

$$\frac{xx'}{A} + \frac{yy'}{B} + \frac{zz'}{C} + \cdots = 0$$

ist, konjugiert. Dieses ist also mit dem Tangentialkontinuum parallel. Der von der Lösung $(x, y, \ldots)$ ausgehende zum Tangentialkontinuum normale Strahl heisse die **Normale** jener Lösung. Setzt man

$$\frac{1}{p^2} = \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} + \cdots,$$

so sind

$$\alpha = \frac{px}{A}, \quad \beta = \frac{py}{B}, \quad \gamma = \frac{pz}{C}, \cdots$$

die Richtungskosinus der Normale, und der Abstand des Centrums vom Tangentialkontinuum oder das Perpendikel ist $\alpha x + \beta y + \cdots = p$. Man hat also auch

$$p^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + \cdots.$$

Hieraus erhellt, dass, wenn vom Centrum aus auf der Richtung des Perpendikels sein reciproker Wert aufgetragen wird, die so erhaltene Lösung wiederum einem quadratischen Kontinuum angehört, dessen Hauptaxen zwar gleich liegen wie beim ursprünglichen quadratischen Kontinuum, aber die reciproken Werte haben, ferner, dass die Normale mit h parallel ist, und dass das Perpendikel den Wert $\frac{1}{h}$ hat.

Das Tangentialkontinuum schneidet das quadratische Kontinuum in einem $(n-2)$-fachen Kontinuum. Die Beschaffenheit desselben wird am leichtesten erkannt, wenn man das System der Hauptaxen in ein System konjugierter Halbmesser transformiert, welchem h angehört. Geht dadurch die quadratische Gleichung über in

$$\frac{t^2}{H} + \frac{t'^2}{H'} + \frac{t''^2}{H''} + \cdots = 1,$$

wo $H = h^2$, so ist $t = h$ die Gleichung des Tangentialkontinuums für die Lösung $(t = h,\ t' = t'' = \cdots = 0)$, und das $(n-2)$-fache Durchschnittskontinuum wird durch die Gleichungen

$$t = h, \quad \frac{t'^2}{H'} + \frac{t''^2}{H''} + \frac{t'''^2}{H'''} + \cdots = 0$$

dargestellt, ist also innerhalb der durch $t = h$ bezeichneten $(n-1)$-fachen Totalität ein strahliges Kontinuum zweiten Grades. Für dessen Reellität reicht es hin, wenn nicht alle Halbmesserquadrate $H', H'', H''', \ldots$ gleichartig sind. Diese Ausnahme ereignet sich nur in zwei Fällen: 1. wenn alle Hauptaxenquadrate $A, B, \ldots$ positiv sind, 2. wenn nur eines positiv, alle übrigen negativ sind. Daher der Satz:

In den zwei Gattungen von quadratischen Kontinuen, wo entweder alle Hauptaxenquadrate oder nur eines positiv sind, hat jedes Tangentialkontinuum mit ihm nur die Berührungslösung in reeller Weise gemein; in den $n-2$ übrigen Gattungen dagegen schneidet das Tangentialkontinuum das quadratische Kontinuum in einem strahligen Kontinuum zweiten Grades.

Sind $f, g, h, \ldots$ die Werte einer beliebigen Lösung, durch welche ein Tangentialkontinuum an das gegebene quadratische Kontinuum gelegt werden soll, so muss die Berührungslösung $(x, y, \ldots)$ der Bedingung

$$\frac{fx}{A} + \frac{gy}{B} + \cdots = 1$$

genügen. Diese stellt das polare lineare Kontinuum zu $(f, g, \ldots)$ dar. Alle Tangentialstrahlen, welche den Pol $(f, g, \ldots)$ mit je einer Berührungslösung $(x, y, \ldots)$ verbinden, bilden ein umschriebenes strahliges Kontinuum, dessen Gleichung

$$\left(\frac{f^2}{A} + \frac{g^2}{B} + \cdots - 1\right)\left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots - 1\right) - \left(\frac{fx}{A} + \frac{gy}{B} + \cdots - 1\right)^2 = 0$$

oder

$$\frac{(fy - gx)^2}{AB} + \text{etc.} - \frac{(x-f)^2}{A} - \frac{(y-g)^2}{B} - \text{etc.} = 0$$

ist. Der Beweis ist aus der Identität beider Formen dieser Gleichung zu entnehmen.

Dass jeder vom Pol $(f, g, \ldots)$ ausgehende Strahl vom polaren linearen Kontinuum in Beziehung auf die beiden Lösungen, in denen er das quadratische Kontinuum trifft, harmonisch geschnitten wird, ist leicht einzusehen. Man braucht nur durch den Strahl ein zweifaches lineares Kontinuum zu legen.

Wenn, wie bisher, $A, B, \ldots$ die Quadrate der Hauptaxen eines Kontinuums zweiten Grades, p das auf ein Tangentialkontinuum aus dem Centrum gefällte Perpendikel und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ dessen Richtungskosinus oder, wenn man will, diejenigen der entsprechenden Normale bezeichnen, so war oben $p^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + \cdots$. Versieht man nun in dieser Gleichung $p, \alpha, \beta, \ldots$ nach und nach mit den Zeigern $1, 2, \ldots n$ und setzt die entsprechenden Richtungen als sämtlich unter sich orthogonal voraus, so

folgt sogleich aus den bekannten Eigenschaften eines orthogonalen Transformationssystems

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \cdots + p_n^2 = A + B + C + \cdots$$

Dann sind aber auch die entsprechenden Tangentialkontinua alle zu einander orthogonal; es seien $x, y, \ldots$ die Werte ihrer Durchschnittslösung. Dieselbe ist offenbar das dem Centrum entgegengesetzte Eck eines orthogonalen Paralleloschems, dessen Kanten $p_1, p_2, \ldots p_n$ sind; folglich ist $x^2 + y^2 + \cdots = p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2$; also zuletzt

$$x^2 + y^2 + z^2 + \cdots = A + B + C + \cdots$$

eine Gleichung, welcher jene Durchschnittslösung genügt. Wenn also ein solches Eck, wie wir es früher als Masseinheit des n-sphärischen Kontinuums gebraucht haben, von lauter Tangentialkontinuen eines quadratischen Kontinuums der n-fachen Totalität gebildet wird, so liegt dasselbe auf einer konzentrischen n-Sphäre, deren Radiusquadrat gleich ist der Summe der n Hauptaxenquadrate.

Die entsprechenden Sätze für die Ebene und den Raum sind bekannt, der letztere trägt Monge's Namen.

§ 40. Bestimmung der Hauptaxen eines diametralen Schnitts; Definition der konfokalen Kontinuen.

Dem Halbmesser h, dessen Projektionen $x, y, \ldots$ sind, sei ein diametrales lineares Kontinuum konjugiert; $\alpha, \beta, \ldots$ seien die Richtungskosinus der Normale des letzten, also $\alpha = \frac{px}{A}$, $\beta = \frac{py}{B}, \ldots$ Sind nun $(\alpha', \beta', \gamma', \ldots)$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'', \ldots)$, etc. die Richtungskosinus der Hauptaxen dieses diametralen Schnitts, R', R'', etc., deren Quadrate, so müssen die Bedingungen

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' + \cdots = 0, \qquad \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' + \cdots = 0, \text{ etc.}$$
$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' + \cdots = 0, \text{ etc.}, \qquad \frac{\alpha'\alpha''}{A} + \frac{\beta'\beta''}{B} + \frac{\gamma'\gamma''}{C} + \cdots = 0, \text{ etc.}$$
$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \cdots = 1, \text{ etc.}$$

erfüllt sein; und dann ist

$$\frac{1}{R'} = \frac{\alpha'^2}{A} + \frac{\beta'^2}{B} + \frac{\gamma'^2}{C} + \cdots, \text{ etc.}$$

Stellt man nun die Gleichungen

$$\alpha \frac{\alpha'}{A} + \beta \frac{\beta'}{B} + \gamma \frac{\gamma'}{C} + \cdots = \frac{1}{S'},$$
$$\alpha' \frac{\alpha'}{A} + \beta' \frac{\beta'}{B} + \gamma' \frac{\gamma'}{C} + \cdots = \frac{1}{R'},$$
$$\alpha'' \frac{\alpha'}{A} + \beta'' \frac{\beta'}{B} + \gamma'' \frac{\gamma'}{C} + \cdots = 0,$$
$$\alpha''' \frac{\alpha'}{A} + \beta''' \frac{\beta'}{B} + \gamma''' \frac{\gamma'}{C} + \cdots = 0,$$

etc.

zusammen, multipliziert sie mit $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ und addiert sie, so folgt, nachdem man mit $A - R'$ dividiert hat:

$$\frac{1}{R'} \cdot \frac{\alpha'}{A} + \frac{1}{S'} \cdot \frac{\alpha}{A - R'} = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $A\alpha$ und summiert sie in Beziehung auf $A, B, C, \ldots$, so ergiebt sich

$$\frac{A\alpha^2}{A - R'} + \frac{B\beta^2}{B - R'} + \frac{C\gamma^2}{C - R'} + \cdots = 0,$$

oder, wenn für $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ihre Werte $\frac{px}{A}, \frac{py}{B}, \ldots$ substituiert werden,

$$\frac{x^2}{A(A - R')} + \frac{y^2}{B(B - R')} + \frac{z^2}{C(C - R')} + \cdots = 0,$$

oder, da

$$\frac{R'}{A(A - R')} = \frac{1}{A - R'} - \frac{1}{A}, \text{ etc., } \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots = 1$$

ist, auch

$$\frac{x^2}{A - R'} + \frac{y^2}{B - R'} + \frac{z^2}{C - R'} + \cdots = 1. \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Wird diese Gleichung von Brüchen befreit, so erscheint sie in Beziehung auf die Unbekannte R' vom n-ten Grade. Da sie aber schon durch $R' = 0$ befriedigt ist, so sind ihre $n - 1$ übrigen Wurzeln gerade die gesuchten Quadrate $R', R'', R''', \ldots$ der Hauptaxen des der Lösung $(x, y, \ldots)$ konjugierten diametralen Schnitts.

Die Gleichung (1) giebt nun

$$\alpha' : \beta' : \gamma' : \cdots = \frac{x}{A - R'} : \frac{y}{B - R'} : \frac{z}{C - R'} : \cdots$$

Wird (2) als Gleichung eines quadratischen Kontinuums aufgefasst und das entsprechende Perpendikel mit p' bezeichnet, so sind

$$\alpha' = \frac{p' x}{A - R'}, \quad \beta' = \frac{p' y}{B - R'}, \quad \gamma' = \frac{p' z}{C - R'}, \; \cdots\cdot$$

zugleich die Richtungskosinus der Normale dieses neuen quadratischen Kontinuums.

Wenn für zwei quadratische Kontinua die Hauptaxen der Richtung nach zusammenfallen, und die Hauptaxenquadrate des einen Kontinuums alle um gleich viel von den gleichnamigen des andern sich unterscheiden, so sollen sie **konfokale Kontinua** heissen.

Wenn demnach in der Gleichung $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots = 1$ die Hauptaxenquadrate $A, B, \ldots$ so variiert werden, dass immer $dA = dB = dC = \cdots$ ist, so stellt dieselbe eine **Schar konfokaler Kontinua** dar. Ist die reelle Lösung $(x, y, \ldots)$ gegeben, so zeigt die Diskussion der Gleichung, dass sie in Beziehung auf die Unbekannte A vom n-ten Grade ist, und dass ihre n Wurzeln immer alle reell sind; für die erste Wurzel sind alle Hauptaxenquadrate $A, B, C, \ldots$ positiv, für die zweite ist eines, für die dritte sind zwei, u. s. f., für die n-te sind deren $n - 1$ negativ. Setzen wir $A > B > C > \cdots$ und lassen A von 0 bis $+\infty$ wachsen, so geht das quadratische Kontinuum n mal durch jede in der n-fachen Totalität enthaltene Lösung. Durch jede gegebene reelle Lösung gehen also immer gerade n konfokale Kontinua, und diese gehören allen n Gattungen von quadratischen Kontinuen an.

Man kann auch leicht zeigen, dass zwei konfokale Kontinua derselben Gattung keine reelle Lösung gemein haben können. Sind nämlich $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots\cdot = 1$, $\frac{x^2}{A'} + \frac{y^2}{B'} + \cdots\cdot = 1$ ihre Gleichungen, und zieht man diese von einander ab und dividiert durch $A - A' = B - B' = C - C' =$ etc., so folgt

$$\frac{x^2}{AA'} + \frac{y^2}{BB'} + \frac{z^2}{CC'} + \cdots = 0\,. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

Da aber hier der Voraussetzung zufolge alle Nenner positiv sind, so kann die Gleichung für reelle Werte $x, y, \ldots$ nicht bestehen.

Gehören aber die beiden quadratischen Kontinua verschiedenen Gattungen an, so wird es in der Gleichung (a) auch negative Nenner geben; diese ist daher möglich, und sie zeigt zugleich, dass **die Normalen der konfokalen Kontinua in einer gemeinschaftlichen Lösung auf einander senkrecht stehen.**

Die obige Bestimmung der Hauptaxen eines diametralen Schnitts des quadratischen Kontinuums kann nun in folgendem Satze ausgesprochen werden:

Ist ein diametraler Schnitt eines quadratischen Kontinuums gegeben, so ziehe man aus dem Centrum O den konjugierten Halbmesser OA, führe durch die Lösung A die $n-1$ konfokalen Kontinua und errichte in A auf

jedes die Normale. Dann sind die Hauptaxen des Schnitts mit diesen Normalen parallel, und ihre Quadrate sind gleich den Ueberschüssen eines Hauptaxenquadrats des gegebenen quadratischen Kontinuums über das gleichnamige Hauptaxenquadrat eines jeden konfokalen Kontinuums.

§ 41. *Fortsetzung der Lehre von den konfokalen Kontinuen.*

I. Konfokale Kontinua sind orthogonal. Schon bewiesen.

II. Satz. Wenn n konfokale Kontinua, deren Centrum O, sich in einer Lösung P schneiden, und gilt P wiederum als Centrum einer Schar konfokaler Kontinua, deren Hauptaxen mit den Normalen der vorigen zusammenfallen; werden ferner diese Hauptaxen resp. irgend n gleichnamigen Hauptaxen der vorigen n konfokalen Kontinua gleichgesetzt: so geht das so bestimmte quadratische Kontinuum durch O, und seine dortige Normale hat gleiche Richtung mit den erwähnten gleichnamigen Hauptaxen der ursprünglichen Schar.

Beweis. Der Ausdruck

$$V = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} + \cdots \quad (dA = dB = dC = \cdots)$$

erhalte für $A = A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ den Wert 1, oder, wenn man will, $A_1, A_2, \ldots A_n$ seien die Wurzeln der Gleichung $V = 1$. Dann ist

$$V = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots = 1 - \frac{(A - A_1)(A - A_2)\ldots(A - A_n)}{ABC\ldots\ldots}, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

für jeden beliebigen Wert von A. Schafft man nämlich die Brüche weg, so sind links die höchsten Glieder vom $(n-1)$-ten Grade; rechts sind die höchsten Glieder $ABC\ldots$ und $-A^n$, und es ist klar, dass bei ihrer Entwicklung die n-ten Potenzen der Variabeln A sich aufheben. Die vorliegende Gleichung ist also höchstens vom $(n-1)$-ten Grade. Nun wird sie aber durch die n Werte $A = A_1$, $A = A_2$, $A = A_3, \ldots A = A_n$ befriedigt und muss also eine identische Gleichung sein.

Multipliziert man die Gleichung (1) mit A und setzt dann $A = 0$, so erhält man

$$x^2 = \frac{A_1 A_2 A_3 \ldots A_n}{(A - B)(A - C)\ldots}, \text{ ebenso } y^2 = \frac{B_1 B_2 \ldots B_n}{(B - A)(B - C)\ldots}, \text{ etc.}$$

Lässt man $A - A_1$ verschwinden, so ergiebt sich nach vorhergegangener Differentiation

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{B_1^2} + \cdots = \frac{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)\ldots(A_1 - A_n)}{A_1 B_1 C_1 \ldots\ldots}.$$

Wenn man also die vom Centrum auf die Tangentialkontinua der konfokalen Kontinua gefällten Perpendikel mit $p_1, p_2, \ldots p_n$ bezeichnet, so ist

$$p_1^2 = \frac{A_1 B_1 C_1 \ldots .}{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3) \ldots (A_1 - A_n)}, \quad p_2^2 = \frac{A_2 B_2 C_2 \ldots ..}{(A_2 - A_1)(A_2 - A_3) \ldots (A_2 - A_n)}, \text{ etc.}$$

Da diese Ausdrücke denen für $x^2, y^2, \ldots$ genau entsprechen, wenn man $A, B, C, \ldots$ mit $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ vertauscht, so ist

$$\frac{p_1^2}{A_1} + \frac{p_2^2}{A_2} + \cdots + \frac{p_n^2}{A_n} = 1, \quad \frac{p_1^2}{B_1} + \frac{p_2^2}{B_2} + \cdots + \frac{p_n^2}{B_n} = 1, \text{ etc.}$$

Denkt man sich aber die Lösung $(x, y, \ldots)$ als Ursprung und die Normalen als neues Axensystem, so sind $p_1, p_2, \ldots p_n$ die Werte der neuen Variabeln, welche dem alten Centrum O zukommen. Da nun die letzten n Gleichungen ein System konfokaler Kontinua darstellen, so ist die im Satz ausgesprochene wechselseitige Beziehung zwischen dem Centrum O und der Lösung P bewiesen.

III. Satz. Wenn n konfokale Kontinua, welche eine reelle Lösung gemein haben, auf einem beliebigen Strahle resp. die Sehnen $2s, 2s', 2s'', \ldots$ abschneiden, wenn ferner $H, H', H'', \ldots$ die Quadrate ihrer mit dem gegebenen Strahle parallelen Halbmesser, $p, p' p'', \ldots$ die aus dem Centrum auf die Tangentialkontinua der gemeinschaftlichen Lösung gefällten Perpendikel bedeuten, so ist

$$\left(\frac{sp}{H}\right)^2 + \left(\frac{s'p'}{H'}\right)^2 + \left(\frac{s''p''}{H''}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{s^{(n-1)}p^{(n-1)}}{H^{(n-1)}}\right)^2 = 1.$$

Beweis. Es sei $(x, y, \ldots)$ irgend eine dem gegebenen Strahl angehörende Lösung L, und P eine Lösung, die er mit dem Kontinuum $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots = 1$ gemein hat; dann seien $r\lambda, r\mu, r\nu, \ldots$ die Projektionen von $LP = r$ auf die n Hauptaxen. Da $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ gegeben sind, so liefert die Gleichung

$$\frac{(x + r\lambda)^2}{A} + \frac{(y + r\mu)^2}{B} + \cdots = 1$$

zwei Werte für die Unbekannte r; ihr Unterschied ist die Sehne $2s$; ferner ist

$$\frac{1}{H} = \frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \frac{\nu^2}{C} + \cdots;$$

setzt man noch

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} + \cdots = 1 - V,$$

so wird die Gleichung für r:

$$\frac{r^2}{H} + 2\left(\frac{\lambda x}{A} + \frac{\mu y}{B} + \cdots\right) r - V = 0,$$

woraus folgt, wenn man das Summenzeichen Σ auf die Variabeln $x, y, \ldots$ bezieht,

$$\left(\frac{s}{H}\right)^2 = \left(\Sigma \frac{\lambda x}{A}\right)^2 + V \Sigma \frac{\lambda^2}{A}.$$

Betrachtet man jetzt in der Gleichung $V = 0$ ein Axenquadrat, z. B. A, als Unbekannte, bezeichnet ihre Werte mit $A_1, A_2, \ldots A_n$, die entsprechenden Perpendikel mit $p_1, p_2, \ldots p_n$ und die Kosinus der Winkel, welche der gegebene Strahl mit den Normalen dieser durch L gelegten konfokalen Kontinua bildet, durch $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ und gebraucht S als Summenzeichen für den untern Zeiger $i = 1, 2, \ldots n$, so ist

$$\lambda = x\, S \frac{\varepsilon_i p_i}{A_i}, \quad \mu = y\, S \frac{\varepsilon_i p_i}{B_i}, \text{ etc.},$$

$$\Sigma \frac{\lambda x}{A} = S\, \varepsilon_i\, p_i \left(\Sigma \frac{x^2}{A A_i}\right) = S \frac{\varepsilon_i p_i}{A - A_i}\left(\Sigma \frac{x^2}{A_i} - \Sigma \frac{x^2}{A}\right) = V S \frac{\varepsilon_i p_i}{A - A_i},$$

$$\Sigma \frac{\lambda^2}{A} = S\, \varepsilon_i\, p_i \left(\Sigma \frac{\lambda x}{A A_i}\right) = S \frac{\varepsilon_i p_i}{A - A_i}\left(\Sigma \frac{\lambda x}{A_i} - \Sigma \frac{\lambda x}{A}\right) = S \frac{\varepsilon_i p_i}{A - A_i}\left(\Sigma \frac{\lambda x}{A_i}\right) - V\left(S \frac{\varepsilon_i p_i}{A - A_i}\right)^2;$$

also

$$\left(\frac{s}{H}\right)^2 = V \,.\, S \frac{\varepsilon_i p_i}{A - A_i}\left(\Sigma \frac{\lambda x}{A_i}\right);$$

aber z. B.

$$\Sigma \frac{\lambda x}{A_1} = S\, \varepsilon_i\, p_i \left(\Sigma \frac{x^2}{A_1 A_i}\right) = \varepsilon_1\, p_1\, \Sigma \frac{x^2}{A_1^2} = \frac{\varepsilon_1}{p_1}$$

daher

$$\left(\frac{s}{H}\right)^2 = V \,.\, S \frac{\varepsilon_i^2}{A - A_i}.$$

Nun ist vermöge der Formel (1)

$$V = \frac{(A - A_1)(A - A_2)\ldots(A - A_n)}{A B C \ldots\ldots},$$

überdies

$$p^2 = \frac{A B C \ldots\ldots}{(A - A')(A - A'')(A - A''')\ldots};$$

also

$$\left(\frac{p s}{H}\right)^2 = \frac{(A - A_1)(A - A_2)\ldots(A - A_n).}{(A - A')(A - A'')(A - A''')\ldots.} \cdot S \frac{\varepsilon_i^2}{A - A_i}. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Ist nun Q die gemeinschaftliche Lösung der n gegebenen konfokalen Kontinua, welche durch die ersten Hauptaxenquadrate $A, A', A'', \ldots$ bestimmt sind, und werden die Normalen dieser Kontinua in Q als Axen der Variabeln $t, t', t'', \ldots$ eines neuen durch die Gleichung

$$\frac{t^2}{A-u} + \frac{t'^2}{A'-u} + \frac{t''^2}{A''-u} + \cdots = 1$$

dargestellten Systems konfokaler Kontinua aufgefasst, werden endlich die Variabeln $t, t', t'', \ldots$ dadurch völlig bestimmt, dass sie den Werten $u = A_1$, $u = A_2, \ldots u = A_n$ entsprechen sollen, so giebt die Gleichung (2)

$$\left(\frac{ps}{H}\right)^2 = t^2 S \frac{\varepsilon_i^2}{A - A_i}, \quad \left(\frac{p's'}{H'}\right)^2 = t'^2 S \frac{\varepsilon_i^2}{A' A_i}, \text{ etc.} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Addiert man diese Gleichungen und bedenkt, dass $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \cdots + \varepsilon_n^2 = 1$ ist, so erhält man

$$\left(\frac{ps}{H}\right)^2 + \left(\frac{p's'}{H'}\right)^2 + \left(\frac{p''s''}{H''}\right)^2 + \cdots = 1. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

IV. Setzt man

$$\frac{t^2}{(A-A_i)^2} + \frac{t'^2}{(A'-A_i)^2} + \frac{t''^2}{(A''-A_i)^2} + \cdots = \frac{1}{q_i^2},$$

woraus z. B.

$$q_1^2 = \frac{(A-A_1)(A'-A_1)(A''-A_1)\ldots}{(A_2-A_1)(A_3-A_1)\ldots(A_n-A_1)}$$

folgt, dividiert die Gleichungen (3) resp. durch $A - A_1$, $A' - A_1$, $A'' - A_1, \ldots$ und addiert sie, so erhält man

$$\frac{\varepsilon_1^2}{q_1^2} = \frac{\left(\frac{ps}{H}\right)^2}{A-A_1} + \frac{\left(\frac{p's'}{H'}\right)^2}{A'-A_1} + \frac{\left(\frac{p''s''}{H''}\right)^2}{A''-A_1} + \cdots, \text{ etc.} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Sind die konfokalen Flächen $A, A', A'', \ldots$ und die Lösung L (also auch $A_1, A_2, \ldots A_n$) gegeben, so sind $p, p', p'', \ldots$; $q_1, q_2, \ldots q_n$ bekannt. Man kann nun für die Brüche $\frac{s}{H}, \frac{s'}{H'}, \ldots$ beliebige Werte annehmen, welche der Relation (4) genügen, und dann bestimmen die Gleichungen (5) die Richtung des von L ausgehenden Strahls, welcher den genannten Bedingungen hinsichtlich der auf ihm abgeschnittenen Sehnen entspricht.

V. Soll das quadratische Kontinuum, dessen erstes Axenquadrat A ist, den Strahl berühren, so muss die halbe Sehne s verschwinden; man bekommt so die Bedingung

$$\frac{\varepsilon_1^2}{A-A_1} + \frac{\varepsilon_2^2}{A-A_2} + \frac{\varepsilon_3^2}{A-A_3} + \cdots + \frac{\varepsilon_n^2}{A-A_n} = 0. \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

Sie ist in Beziehung auf A vom $(n-1)$-ten Grade. Irgend ein Strahl wird also gerade von $n-1$ konfokalen Kontinuen berührt. Sind diese dieselben mit denen, deren erste Axenquadrate vorhin mit $A', A'', \dots A^{(n-1)}$ bezeichnet wurden, so ist $s' = s'' = \cdots = 0$, und die Gleichung (4) giebt $p\,s = H$. Sind die Kontinua $A, A', A'', \dots$ alle fest, aber die Richtung des Strahls veränderlich, so ist p konstant, und s daher mit H proportional. D. h.:

Wenn durch einen beweglichen Strahl das erste von n festen konfokalen Kontinuen geschnitten und die übrigen berührt werden, so ist die vom ersten Kontinuum auf dem Strahl abgeschnittene Sehne dem Quadrat seines mit dieser parallelen Halbmessers proportional.

VI. Denkt man sich in der Gleichung (6) nur die Kosinus $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots \varepsilon_n$ variabel, so bewegt sich der Strahl um die Lösung L herum, indem er fortwährend das quadratische Kontinuum (A) berührt; er beschreibt also um dieses ein strahliges Kontinuum. Die Formel (6) liefert dann den Satz:

Wenn aus einer beliebigen Spitze einem quadratischen Kontinuum ein strahliges Kontinuum umschrieben wird, so sind seine Hauptaxen die Normalen der durch die Spitze gelegten mit dem erstern konfokalen Kontinua, und die unendlich kleinen Hauptaxenquadrate sind proportional mit den Ueberschüssen eines Axenquadrats des gegebenen Kontinuums über die gleichnamigen der konfokalen Kontinua.

VII. Bei diesem Anlasse wollen wir auch den allgemeinen Fall untersuchen, wo ein quadratisches Kontinuum überhaupt einem andern umschrieben ist. — Betrachten wir zuerst zwei quadratische Kontinua, die sich schneiden, und setzen $u = 0$, $v = 0$ als Gleichungen derselben, so wird $u + \lambda v = 0$, wo λ einen willkürlichen Faktor bedeutet, jedes quadratische Kontinuum darstellen, welches durch das $(n-2)$-fache Kontinuum des Durchschnitts geht. (Durch $\frac{1}{2} n (n+3)$ Lösungen wird nämlich im allgemeinen ein quadratisches Kontinuum bestimmt. Wählt man nun $\frac{1}{2} n (n+3) - 1$ Lösungen auf dem Durchschnittskontinuum und eine ausserhalb desselben auf dem durchgelegten quadratischen Kontinuum nach Belieben, so befriedigen jene Lösungen die Gleichung $u + \lambda v = 0$ schon von selbst, und diese einzige Lösung dient zur Bestimmung des Faktors λ. Da jetzt das durch $u + \lambda v = 0$ dargestellte Kontinuum mit dem vorigen $\frac{1}{2} n (n+3)$ Lösungen gemein hat, so fallen beide in ihrer ganzen Ausdehnung zusammen.) Macht man nun die Polynome u, v durch Einführung einer $(n+1)$-ten Variabeln homogen und setzt die Determinante der zweiten abgeleiteten Funktionen oder die Funktionaldeterminante $\nabla(u + \lambda v) = 0$, so bekommt man eine Gleichung

$(n+1)$-ten Grades für λ, durch welche die Bedingung eines strahligen Kontinuums ausgedrückt wird, das durch jenen Durchschnitt gehen soll. (Siehe die Bemerkung am Ende von § 36.) Es giebt also solche strahlige Kontinua, seien sie nun reell oder imaginär. — Nehmen wir jetzt an, der Durchschnitt sei im Besondern eine Berührung, d. h. für jede gemeinschaftliche Lösung der Gleichungen $u = 0$, $v = 0$ seien die $n+1$ ersten abgeleiteten Funktionen von u mit den entsprechenden von v proportional, so sind sie es auch mit denen von $u + \lambda v$, d. h. alle in der Gleichung $u + \lambda v = 0$ enthaltenen quadratischen Kontinua berühren einander in der ganzen Ausdehnung eines $(n-2)$-fachen Berührungskontinuums. Unter diesen giebt es strahlige Kontinua. Ist ein solches nicht schon linear, so liegt das Berührungskontinuum ganz in dem $(n-1)$-fachen linearen Polarkontinuum seiner Spitze. Hieraus fliesst der Satz:

Wenn zwei quadratische Kontinua sich in einem $(n-2)$-fachen Kontinuum berühren, so fällt dieses Berührungskontinuum ganz in ein $(n-1)$-faches lineares Kontinuum.

Wird dieses lineare Kontinuum durch die Gleichung $s = 0$ dargestellt, so muss also v die Form $u + ks^2$ haben, wo k einen willkürlichen Faktor bedeutet. Setzen wir nun

$$u = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots - 1, \quad s = ax + by + \cdots - 1,$$

so wird

$$v = \Sigma \frac{x^2}{A} - 1 + k(\Sigma a x - 1)^2 = 0$$

die Gleichung irgend eines dem Kontinuum $u = 0$ umschriebenen Kontinuums sein. Wir suchen zunächst die Werte $f, g, h, \ldots$ seines Centrums. Setzt man $f, g, h, \ldots$ anstatt $x, y, \ldots$, so sind sie durch die Gleichungen $\frac{\partial v}{\partial f} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial g} = 0$, etc. bestimmt. Also ist

$$\frac{f}{A} + k a s = 0\,, \quad \frac{g}{B} + k b s = 0\,, \text{ etc.}$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit $Aa, Bb, \ldots$ und addiert sie, so erhält man

$$s + 1 + k s \,\Sigma A a^2 = 0, \quad s = -\frac{1}{1 + k \Sigma A a^2},$$

$$f = \frac{k A a}{1 + k \Sigma A a^2}, \quad g = \frac{k B b}{1 + k \Sigma A a^2}, \text{ etc.}$$

Hierdurch sind die Werte des Centrums bestimmt. Setzt man nun $x = f + x'$, $y = g + y'$, ..., so wird

$$v = \Sigma \frac{x'^2}{A} + k(\Sigma a x')^2 + \Theta - 1, \quad \text{wo } \Theta = \frac{k}{1 + k \Sigma A a^2}.$$

Es seien ferner $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ die Richtungskosinus einer Hauptaxe, $w\,(1-\Theta)$ das Quadrat derselben, $\varDelta = a\,\lambda + b\,\mu + \cdots$, so hat man

$$\frac{\lambda}{A} + k\,\varDelta\,a = \frac{\lambda}{w}, \text{ etc.,}$$

also

$$\lambda = k\,\varDelta\,w\,\frac{A\,a}{A-w}, \quad \mu = k\,\varDelta\,w\,\frac{B\,b}{B-w}, \text{ etc.,}$$

und wenn man diese Gleichungen mit $a, b, \ldots$ multipliziert und addiert,

$$1 = k\,w\,\Sigma\,\frac{A\,a^2}{A-w} = k\left(\Sigma\,\frac{(A\,a)^2}{A-w} - \Sigma\,A\,a^2\right),$$

oder

$$\Sigma\,\frac{(A\,a)^2}{A-w} = \frac{1}{\Theta}, \quad \text{oder} \quad \Sigma\,\frac{f^2}{A-w} = \Theta.$$

Es ist ferner $a = \frac{f}{\Theta\,A}$, $b = \frac{g}{\Theta\,B}$, etc., also

$$\Sigma\,A\,a^2 = \frac{1}{\Theta^2}\,\Sigma\,\frac{f^2}{A}, \quad k = \Theta + \frac{k}{\Theta}\,\Sigma\,\frac{f^2}{A}, \quad k = \frac{\Theta^2}{\Theta - \Sigma\,\frac{f^2}{A}}.$$

Die Gleichung des umschriebenen Kontinuums kann jetzt unter der Form

$$\left(\frac{f^2}{A} + \frac{g^2}{B} + \cdots - \Theta\right)\left(\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots - 1\right) - \left(\frac{f\,x}{A} + \frac{g\,y}{B} + \cdots - \Theta\right)^2 = 0$$

gegeben werden. Es sind dann $f, g, h, \ldots$ die Werte seines Centrums, $\frac{f}{\Theta}, \frac{g}{\Theta}, \ldots$ diejenigen des Pols des $(n-1)$-fachen linearen Kontinuums, welches durch die Berührung gelegt ist. Wird das Centrum festgehalten, so kann also der Pol sich nur auf dem Strahle bewegen, welcher beide Centra verbindet. Man verändere nun die linearen Dimensionen des ersten quadratischen Kontinuums im Verhältnisse $1 : \sqrt{\Theta}$, und lasse dieses neue dem ersten ähnliche und konzentrische Kontinuum eine Schar konfokaler Kontinua bestimmen, von denen n durch das zweite Centrum $(f, g, \ldots)$ gehen werden und durch die Gleichung $\Sigma\,\frac{f^2}{A-w} = \Theta$ dargestellt sind, wo man für w nach und nach n verschiedene Werte zu denken hat. Da aus den obigen Relationen jetzt leicht $\lambda : \mu : \nu : \cdots = \frac{f}{A-w} : \frac{g}{B-w} : \frac{h}{C-w} : \cdots$ folgt, so sind die im zweiten Centrum errichteten Normalen der Richtung nach die Hauptaxen des umschriebenen zweiten Kontinuums, und im Ausdruck $w\,(1-\Theta)$ sind alle entsprechenden Axenquadrate enthalten.

Durch diese Erörterung ist die Aufgabe gelöst, einem gegebenen quadratischen Kontinuum (dessen Centrum O) ein anderes umzuschreiben, wenn sein Centrum L und auf dem beide Centra verbindenden Strahle OL nach Belieben ein das Berührungskontinuum bestimmender Pol $P \left(OP = \frac{1}{\Theta} \cdot OL\right)$ gegeben sind.

§ 42. *Reduzierte Form der Differentialgleichung zweiter Ordnung eines höhern Kontinuums.*

Es sei $f(x, y, \ldots) = 0$ die Gleichung eines höhern Kontinuums, $\xi, v, \ldots$ seien die (als unendlich kleine Grössen erster Ordnung zu denkenden) Inkremente der n-Variabeln $x, y, \ldots$, und

$$D = \xi \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \cdots$$

ein Ableitungssymbol, für welches $\xi, v, \ldots$ als konstant gelten; dann ist bis zur zweiten Ordnung der Inkremente

$$f(x + \xi, y + v, \ldots) = f(x, y, \ldots) + Df + \frac{1}{2} DDf = 0,$$

also

$$Df + \frac{1}{2} DDf = 0,$$

und da DDf von der zweiten Ordnung ist, so muss auch Df von der zweiten Ordnung sein. Sind nun $\lambda, \mu, \ldots$ die Richtungskosinus der Normale, $\frac{\partial f}{\partial x} = R\lambda$, $\frac{\partial f}{\partial y} = R\mu, \ldots$, also

$$Df = R(\lambda\xi + \mu v + \nu\zeta + \cdots) = Rt,$$

so ist auch t, oder „die Entfernung der Lösung $(x + \xi, y + v, \ldots)$ des gegebenen höhern Kontinuums vom linearen Tangentialkontinuum“, eine Grösse zweiter Ordnung. Demnach ist in der vollständigen Gleichung $DDf = D.\,Rt = tDR + RDt$ rechts das Glied tDR als Grösse dritter Ordnung im Vergleich mit $Dt = \xi D\lambda + v D\mu + \cdots$ als einer Grösse zweiter Ordnung zu vernachlässigen, sodass man einfach hat: $DDf = RDt$. Folglich ist

$$t + \frac{1}{2} Dt = 0$$

die Differentialgleichung zweiter Ordnung des gegebenen Kontinuums.

Es seien jetzt $\xi = \lambda t + \alpha' t' + \alpha'' t'' + \cdots$, $v = \mu t + \beta' t' + \beta'' t'' + \cdots$, etc. orthogonale Transformationsformeln, durch welche $D t$ in $\frac{t'^2}{\varrho'} + \frac{t''^2}{\varrho''} + \cdots$ übergeht, und die Ableitungssymbole mögen sich nur auf $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, aber nicht auf die übrigen bis jetzt noch unbestimmten Richtungskosinus beziehen, ebensowenig auf $t', t'', \ldots$. Es sei ferner

$$\delta' = \alpha' \frac{\partial}{\partial x} + \beta' \frac{\partial}{\partial y} + \cdots, \delta'' = \alpha'' \frac{\partial}{\partial x} + \beta'' \frac{\partial}{\partial y} + \cdots, \text{ etc.; also } D = t'\delta' + t''\delta'' + \cdots;$$

$$\text{daher } \frac{\partial (D t)}{\partial t'} = \delta' t + D \frac{\partial t}{\partial t'}; \quad \text{aber } \frac{\partial t}{\partial t'} = \lambda \frac{\partial \xi}{\partial t'} + \mu \frac{\partial v}{\partial t'} + \cdots = \lambda \alpha' + \mu \beta' + \cdots,$$

was bloss formell zu verstehen ist; also $D \frac{\partial t}{\partial t'} = \alpha' D \lambda + \beta' D \mu + \cdots$ Nun ist $\delta' D f = D \delta' f$, oder

$$\delta'(R t) = \alpha' D \frac{\partial f}{\partial x} + \beta' D \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots = \alpha' D (R \lambda) + \beta' D (R \mu) + \cdots,$$

oder

$$t \delta' R + R \delta' t = R (\alpha' D \lambda + \beta' D \mu + \cdots) + (\lambda \alpha' + \mu \beta' + \cdots) D R.$$

Da aber t von der zweiten Ordnung und $\lambda \alpha' + \mu \beta' + \cdots = 0$ ist, so folgt

$$\delta' t = \alpha' D \lambda + \beta' D \mu + \cdots.$$

Demnach ist endlich

$$\frac{\partial (D t)}{\partial t'} = 2 \delta' t,$$

oder, da $D t = \frac{t'^2}{\varrho'} + \frac{t''^2}{\varrho''} + \cdots$ vorausgesetzt war,

$$\frac{t'}{\varrho'} = \delta' t = \xi \delta' \lambda + v \delta' \mu + \cdots$$

Da diese Gleichung in Beziehung auf $t', t'', \ldots$ identisch, und ohnehin wegen $\lambda^2 + \mu^2 + \cdots = 1$ auch $\lambda \delta' \lambda + \mu \delta' \mu + \cdots = 0$ ist, so darf man $t = \lambda$, $t' = \alpha'$, $t'' = \alpha''$, ... darin substituieren, wodurch $\xi = 1$, $v = \zeta = \cdots = 0$ wird, und bekommt

$$\frac{\alpha'}{\varrho'} = \delta' \lambda, \text{ ebenso } \frac{\beta'}{\varrho'} = \delta' \mu, \frac{\gamma'}{\varrho'} = \delta' \nu, \text{ etc.},$$

oder in expliciter Form:

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}-\frac{1}{\varrho'}\right)\alpha'+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\beta'+\frac{\partial\lambda}{\partial z}\gamma'+\cdots=0,\\ \frac{\partial\mu}{\partial x}\alpha'+\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}-\frac{1}{\varrho'}\right)\beta'+\frac{\partial\mu}{\partial z}\gamma'+\cdots=0,\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(a)$$

etc.

Eliminiert man aus diesen n Gleichungen die $n-1$ Verhältnisse $\alpha':\beta':\gamma':\ldots$, so scheint sich auf den ersten Blick eine Endgleichung n-ten Grades für die Unbekannte $\frac{1}{\varrho'}$ zu ergeben. Das von derselben freie Glied ist aber die Determinante $\Sigma\pm\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial y}\frac{\partial\nu}{\partial z}\cdots$ und muss wegen der Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\cdot\lambda+\frac{\partial\mu}{\partial x}\cdot\mu+\frac{\partial\nu}{\partial x}\cdot\nu+\cdots=0\,,\\ \frac{\partial\lambda}{\partial y}\cdot\lambda+\frac{\partial\mu}{\partial y}\cdot\mu+\frac{\partial\nu}{\partial y}\cdot\nu+\cdots=0\,,\end{array}\right\}$$

etc.

verschwinden, da λ, μ, ν, ... nicht alle zugleich verschwinden dürfen. Jene Endgleichung hat also den Faktor $\frac{1}{\varrho'}$, den wir nicht brauchen können, und erniedrigt sich nach Entfernung desselben auf den $(n-1)$-ten Grad. Bezeichnet man ihre $n-1$ Wurzeln mit $\frac{1}{\varrho'}$, $\frac{1}{\varrho''}$, $\frac{1}{\varrho'''}$, etc., so geben die Gleichungen (a) für jede derselben im allgemeinen nur eine Gruppe bestimmter Verhältnisse $(\alpha':\beta':\gamma':\ldots)$, $(\alpha'':\beta'':\gamma'':\ldots)$, $(\alpha''':\beta''':\gamma''':\ldots)$, etc., und es bleibt noch nachzuweisen, dass diese Verhältnisse wirklich den Orthogonalitätsbedingungen genügen. Multipliziert man die Gleichungen (a) mit λ, μ, ν, ... und addiert sie, so ergiebt sich

$$-\frac{\lambda\alpha'+\mu\beta'+\cdots}{\varrho'}=0,\quad\text{oder}\quad\lambda\alpha'+\mu\beta'+\cdots=0.$$

Multipliziert man sie mit R, so erscheinen sie unter der Form:

$$\delta'\frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\,\delta' R+R\,\frac{\alpha'}{\varrho'},\quad\delta'\frac{\partial f}{\partial y}=\mu\,\delta' R+R\,\frac{\beta'}{\varrho'},\ \text{etc.}$$

Multipliziert man jetzt die Gleichungen mit α'', β''... und addiert sie, so erhält man, da schon $\lambda\alpha''+\mu\beta''+\cdots=0$ bewiesen ist,

$$\delta'\delta'' f=\frac{R}{\varrho'}\,(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\cdots),\ \text{ebenso}\ \delta''\delta' f=\frac{R}{\varrho''}\,(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\cdots)\,;$$

da aber $\delta'\delta''f = \delta''\delta'f$ ist, so folgt hieraus

$$\left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho''}\right)(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \cdots) = 0,$$

und, wenn die Wurzeln $\frac{1}{\varrho'}$, $\frac{1}{\varrho''}$ ungleich sind, notwendig

$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \cdots = 0.$$

Hieraus kann ebenso, wie bei der Bestimmung der Hauptaxen eines quadratischen Kontinuums in § 40, geschlossen werden, dass, wenn alles übrige reell ist, immer alle gesuchten Grössen ϱ', ϱ'', ... und die entsprechenden Transformationselemente α', β', ... reell sein werden.

Was den Fall betrifft, wo die Endgleichung für ϱ dieselbe Wurzel mehrfach enthält, so weiss ich da nicht anders zu helfen, als indem ich dem System der Gleichungen (a) eine Form gebe, wo die Vertikalzeilen der Koeffizienten mit den Horizontalzeilen gleichen Rangs übereinstimmen, nämlich:

$$\left.\begin{array}{l}
\phantom{\frac{\partial f}{\partial x}\psi' +{}} \frac{\partial f}{\partial x}\alpha' + \frac{\partial f}{\partial y}\beta' + \frac{\partial f}{\partial z}\gamma' + \cdots\cdot = 0, \\
\frac{\partial f}{\partial x}\psi' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - s'\right)\alpha' + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\beta' + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\gamma' + \cdots\cdot = 0, \\
\frac{\partial f}{\partial y}\psi' + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\alpha' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - s'\right)\beta' + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\gamma' + \cdots\cdot = 0, \\
\frac{\partial f}{\partial z}\psi' + \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}\alpha' + \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}\beta' + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - s'\right)\gamma' + \cdots\cdot = 0, \\
\qquad\qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (b)$$

Hier ist $s' = \frac{R}{\varrho'}$, $\psi' = -\delta' \log R$. Die Form dieses Systems giebt auch sogleich zu erkennen, dass die Endgleichung in s' nur vom $(n-1)$-ten Grade ist. Wendet man auf dieses System die gleichen Schlüsse an wie in § 40, so gewinnt man auch die Einsicht, dass, wenn die Gleichung für s' z. B. eine m-fache Wurzel hat, auch m Gleichungen des Systems von den übrigen abhängen müssen, sodass man statt der gesuchten einfachen Richtung ein m-faches lineares Kontinuum erhält.

Zu den Gleichungen (b) gelangt man unmittelbar so. Es war $Df + \frac{1}{2}DDf = 0$; und es soll $Df = R(\lambda\xi + \mu v + \cdots) = Rt$, $\lambda^2 + \mu^2 + \cdots = 1$, ferner, wenn $\xi = \lambda t + \alpha' t' + \alpha'' t'' + \cdots$, etc. orthogonale Transformationsformeln sind und $t = 0$ gesetzt wird, $DDf = s't'^2 + s''t''^2 + \cdots$ sein. Dann ist $s't' = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t'}DDf$, und, wenn $\frac{\partial}{\partial t'}D = \alpha'\frac{\partial}{\partial x} + \beta'\frac{\partial}{\partial y} + \cdots = \delta'$, etc. gesetzt wird, $s't' = D\delta'f$. Da diese Gleichung

in Bezug auf $t', t'', \ldots$ identisch ist, so kann man auch $t' = \alpha', t'' = \alpha'', \ldots$ setzen, wodurch $\xi = 1 - \lambda^2$, $v = -\lambda\mu$, $\zeta = -\lambda\nu$, also $D = \frac{\partial}{\partial x} - \lambda\left(\lambda\frac{\partial}{\partial x} + \mu\frac{\partial}{\partial y} + \cdots\right)$ wird. Setzt man nun abkürzend

$$-R\psi' = \lambda\delta'\frac{\partial f}{\partial x} + \mu\delta'\frac{\partial f}{\partial y} + \cdots = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta'\frac{\partial f}{\partial x} + \cdots\right) = \delta' R,$$

also $\psi' = -\delta' \log R$, so hat man

$$s'\alpha' = \delta'\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\psi', \text{ etc.},$$

woraus durch Entwicklung die Gleichungen (b) hervorgehen.

Setzen wir nun $s' = -\frac{R}{\varrho'}$, $s'' = -\frac{R}{\varrho''}, \ldots$ (ändern also die Vorzeichen der früher gebrauchten $\varrho', \varrho'', \ldots$), so nimmt die zweite Differentialgleichung des gegebenen höhern Kontinuums die Gestalt

$$2t = \frac{t'^2}{\varrho'} + \frac{t''^2}{\varrho''} + \frac{t'''^2}{\varrho'''} + \cdots$$

an. Denkt man sich im Tangentialkontinuum $t = 0$ von der Berührungslösung aus irgend einen Strahl r gezogen, der mit den orthogonalen Axen der $t', t'', \ldots$ Winkel bildet, deren Kosinus $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ seien, so ist

$$\frac{2t}{r^2} = \frac{\varepsilon'^2}{\varrho'} + \frac{\varepsilon''^2}{\varrho''} + \frac{\varepsilon'''^2}{\varrho'''} + \cdots = \frac{1}{k}.$$

Da das Aggregat auf der rechten Seite dieser Gleichung nur gegebene Grössen enthält, so ist k konstant, und man kann den Schnitt ($r^2 = 2kt$) des durch die Variabeln t, r bestimmten linearen zweifachen Kontinuums (Ebene) als Kreisbogen auffassen vom Halbmesser k; sein Centrum hätte die Werte $x + \lambda k$, $y + \mu k, \ldots\ldots$ Wir nennen $\frac{1}{k}$ die der Richtung r entsprechende Krümmung des höhern Kontinuums, k den Krümmungsradius, $\frac{1}{\varrho'}, \frac{1}{\varrho''}, \ldots$ die Hauptkrümmungen und die entsprechenden Richtungen $(\alpha', \beta', \gamma', \ldots)$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'', \ldots)$, etc. die Hauptkrümmungsrichtungen. Ist

$$\frac{1}{\varrho'} < \frac{1}{\varrho''} < \frac{1}{\varrho'''} < \cdots < \frac{1}{\varrho^{(n-1)}},$$

so ist

$$\frac{1}{\varrho'} < \frac{1}{k} < \frac{1}{\varrho^{(n-1)}};$$

unter den Hauptkrümmungsrichtungen ist also eine die Richtung der grössten, eine andere die der kleinsten Krümmung.

Satz. Werden in dem $(n-1)$-fachen linearen Tangentialkontinuum aus der Berührungslösung Radien eines regulären Polyschems gezogen, so ist das arithmetische Mittel der allen diesen Radien entsprechenden Krümmungen des höhern Kontinuums gleich dem arithmetischen Mittel der $n-1$ Hauptkrümmungen und bleibt also konstant, wenn auch jenes reguläre Polyschem um sein Centrum gedreht wird.

Beweis. Oben war die Krümmung $\frac{1}{k} = \frac{\varepsilon'^2}{\varrho'} + \frac{\varepsilon''^2}{\varrho''} + \cdots$, wenn $\varrho', \varrho'', \ldots$ die Hauptkrümmungsradien und $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ die Kosinus der Winkel bezeichnen, welche die Richtung der Krümmung $\frac{1}{k}$ mit den $n-1$ Hauptkrümmungsrichtungen bildet. Da nun vermöge § 35, wenn das Symbol M ein arithmetisches Mittel anzeigt, im Sinne des ausgesprochenen Satzes $M \cdot \varepsilon'^2 = M \cdot \varepsilon''^2 = \cdots = \frac{1}{n-1}$ ist, so folgt

$$M \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} + \cdots\right), \text{ oder}$$

$$M \cdot \frac{1}{k} = M \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

Da wenigstens für den Raum die Summe und das Produkt aller Hauptkrümmungen von Bedeutung sind, so wollen wir aus der algebraischen Gleichung für ϱ die betreffenden Ausdrücke herleiten. Der Krümmungsradius ϱ ist hier so zu verstehen, dass $x - \lambda\varrho$, $y - \mu\varrho, \ldots$ die Werte des Krümmungszentrums sind. Wir können den $(n-1)$-ten Teil der Summe aller Hauptkrümmungen auch mittlere Krümmung nennen; die algebraische Gleichung, welche aus dem Systeme (a) durch Elimination der Richtungskosinus $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ hervorgeht, giebt für dieselbe den Ausdruck

$$M \cdot \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} + \cdots\right).$$

Entwickelt man die Determinante der Koeffizienten in den Gleichungen (b), so bekommt die höchste Potenz s'^{n-1} den Koeffizienten $-(-1)^{n-1}R^2$, und da $s'^{n-1} = R^{n-1} : \varrho'^{n-1}$ ist, so erhält man für das Produkt aller Hauptkrümmungen den Ausdruck

$$\frac{1}{\varrho'\varrho''\varrho'''\ldots} = - \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} & \cdots \\ \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} : \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \cdots\right)^{\frac{n+1}{2}}.$$

Am Ende dieses Paragraphen gebe ich noch einige mehr unmittelbare Ausdrücke für die Krümmung und für ihre Variation. Oben waren die Hauptkrümmungsrichtungen durch die Gleichungen



$$\frac{\alpha'}{\varrho'} = \delta'\lambda,\ \frac{\beta'}{\varrho'} = \delta'\mu, \ldots;\ \frac{\alpha''}{\varrho''} = \delta''\lambda,\ \frac{\beta''}{\varrho''} = \delta''\mu, \ldots;\ \text{etc.}$$

bestimmt. Geht nun im Tangentialkontinuum von der Berührungslösung aus irgend eine Richtung, welche mit den Axen der $x, y, \ldots$ Winkel, deren Kosinus $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, und mit den Hauptkrümmungsrichtungen Winkel, deren Kosinus $\varepsilon', \varepsilon'', \ldots$ sind, bildet, so ist

$$\alpha = \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \cdots,\quad \beta = \beta'\varepsilon' + \beta''\varepsilon'' + \cdots,\ \text{etc.};$$

also

$$\alpha\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \beta\frac{\partial\lambda}{\partial y} + \cdots = \varepsilon'\delta'\lambda + \varepsilon''\delta''\lambda + \cdots = \frac{\alpha'\varepsilon'}{\varrho'} + \frac{\alpha''\varepsilon''}{\varrho''} + \cdots,$$

$$\alpha\frac{\partial\mu}{\partial x} + \beta\frac{\partial\mu}{\partial y} + \cdots = \frac{\beta'\varepsilon'}{\varrho'} + \frac{\beta''\varepsilon''}{\varrho''} + \cdots,\ \text{etc.},$$

$$\alpha\left(\alpha\frac{\partial\lambda}{\partial x} + \beta\frac{\partial\lambda}{\partial y} + \cdots\right) + \beta\left(\alpha\frac{\partial\mu}{\partial x} + \beta\frac{\partial\mu}{\partial y} + \cdots\right) + \text{etc.} = \frac{\varepsilon'^2}{\varrho'} + \frac{\varepsilon''^2}{\varrho''} + \cdots = \frac{1}{k},$$

oder, da $dx = \alpha\, ds$, $dy = \beta\, ds, \ldots$, $ds^2 = dx^2 + dy^2 + \cdots$, auch

$$\frac{1}{k} = \frac{dx\,d\lambda + dy\,d\mu + dz\,d\nu + \cdots}{dx^2 + dy^2 + dz^2 + \cdots};$$

dies ist der anfangs erwähnte Ausdruck für die allgemeine Krümmung.

Derselbe soll nun bloss in Beziehung auf die Differentiale $dx, dy, \ldots$ variiert werden, und δ sei das Symbol dieser Variation. Es ist

$$\Sigma\, dx\,\delta\, d\frac{\partial f}{\partial x} = \Sigma\, dx\,\delta\,(R\,d\lambda + \lambda\,dR) = R\,\Sigma\,dx\,\delta\,d\lambda + \delta\,d\,R\,\Sigma\,\lambda\,dx;$$

also, da $\Sigma\,\lambda\,dx = 0$ sein muss, $\Sigma\,dx\,\delta\,d\frac{\partial f}{\partial x} = R\,\Sigma\,dx\,\delta\,d\lambda$. Andererseits ist

$$\delta\,d\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\delta\,d\,y + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,\delta\,d\,y + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\,\delta\,d\,z + \cdots,$$

daher

$$\Sigma\,dx\,\delta\,d\frac{\partial f}{\partial x} = \Sigma\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\,dz + \cdots\right)\delta\,dx$$

$$= d\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\delta\,dx + d\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\delta\,dy + \cdots = \Sigma\,(R\,d\lambda + \lambda\,dR)\,\delta\,dx = R\,\Sigma\,d\lambda\,.\,\delta\,dx + d\,R\,\Sigma\,\lambda\,\delta\,dx.$$

Da aber $\Sigma\lambda\,dx = 0$ ist, so folgt auch $\Sigma\lambda\,\delta\,dx = 0$; also ist $\Sigma\,dx\,\delta\,d\frac{\partial f}{\partial x} = R\,\Sigma\,d\lambda\,.\,\delta\,dx$. Aus beiden Verwandlungen folgt endlich

$$\Sigma\,dx\,\delta\,d\lambda = \Sigma\,d\lambda\,.\,\delta\,dx.$$

Mittelst dieser Relation ergiebt sich nun leicht

$$\delta\,\frac{1}{k} = 2\,\frac{\left(d\lambda - \frac{dx}{k}\right)\delta\,d\,x + \left(d\mu - \frac{dy}{k}\right)\delta\,d\,y + \left(d\nu - \frac{dz}{k}\right)\delta\,d\,z + \cdots\cdot}{d\,x^2 \qquad + \qquad d\,y^2 \qquad + \qquad d\,z^2 \qquad + \cdots\cdot}\,.$$

Wenn diese Variation, unabhängig von den Variationen $\delta\,d\,x$, $\delta\,d\,y, \ldots$, verschwindet, so möge das betreffende k durch ϱ ersetzt werden; man erhält dann die Bedingungen

$$\varrho = \frac{dx}{d\lambda} = \frac{dy}{d\mu} = \frac{dz}{d\nu} = \text{etc.},$$

welche die Bedingung $\lambda\,d\,x + \mu\,d\,y + \nu\,d\,z + \cdots = 0$ schon in sich enthalten; es ist sogleich klar, dass sie mit den Gleichungen (a) zusammenfallen; sie dienen daher ebenfalls, um die einer Hauptkrümmungsrichtung entsprechenden Verhältnisse $d\,x : d\,y : d\,z : \ldots$ und den zugehörigen Hauptkrümmungshalbmesser ϱ zu bestimmen. D. h. dieselbe analytische Bedingung $\delta\,k = 0$, welche den grössten und kleinsten Krümmungshalbmesser liefert, giebt zugleich alle Hauptkrümmungsrichtungen samt den zugehörigen Halbmessern.

§ 43. *Ueber orthogonale Kontinua überhaupt, und über die Hauptkrümmungen eines quadratischen Kontinuums.*

Definition. Wenn n Funktionen $f, f', f'', \ldots$ der n Variabeln $x, y, \ldots$ so beschaffen sind, dass die $\frac{1}{2}\,n\,(n-1)$ Gleichungen von der Form

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f'}{d y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f'}{\partial z} + \cdots\cdot = 0$$

alle in identischer Weise bestehen, so bilden die n durch die Gleichungen $f = \text{const.}$, $f' = \text{const.}$, $f'' = \text{const.}$, etc. dargestellten Scharen $(n-1)$-facher höherer Kontinua ein System orthogonaler Kontinua.

Dass solche Systeme auch für eine beliebige Dimensionszahl existieren, ist durch die konfokalen Kontinua zweiten Grades bewiesen.

Satz. Orthogonale Kontinua schneiden einander in den Hauptkrümmungsrichtungen.

Beweis. Es sei $\frac{\partial f}{\partial x} = R\lambda$, $\frac{\partial f}{\partial y} = R\mu, \ldots,$ $\lambda^2 + \mu^2 + \cdots = 1$, $\frac{\partial f'}{\partial x} = R'\lambda'$, $\frac{\partial f'}{\partial y} = R'\mu', \ldots,$ $\lambda'^2 + \mu'^2 + \cdots = 1$, etc., so sind $\lambda, \mu, \ldots;$ $\lambda', \mu', \ldots;$ etc. orthogonale Transformationselemente.

Wenn man also die Gleichungen

$$\frac{df}{R} = \lambda\, d\,x + \mu\, d\,y + \cdots, \quad \frac{df'}{R'} = \lambda' d\,x + \mu' d\,y + \cdots, \text{ etc.}$$

mit $\lambda, \lambda', \ldots$ multipliziert und addiert, so folgt

$$d\,x = \lambda \frac{df}{R} + \lambda' \frac{df'}{R'} + \cdots, \quad d\,y = \mu \frac{df}{R} + \mu' \frac{df'}{R'} + \cdots, \text{ etc.}$$

Daher ist, wenn man jetzt $f, f', f'', \ldots$ als die unabhängigen Variabeln ansieht,

$$\lambda = R\frac{\partial x}{\partial f}, \quad \mu = R\frac{\partial y}{\partial f}, \ldots; \ \lambda' = R'\frac{\partial x}{\partial f'}, \ldots; \text{ etc.}$$

Wir wollen nun die Summe

$$G = \lambda'' \frac{\partial \lambda}{\partial f'} + \mu'' \frac{\partial \mu}{\partial f'} + \cdots = \Sigma \lambda'' \frac{\partial \lambda}{\partial f'}$$

betrachten. Zuerst folgt aus der Gleichung $\lambda\lambda'' + \mu\mu'' + \cdots = 0$, wenn sie in Beziehung auf f' differentiiert wird, sogleich

$$G = -\Sigma \lambda \frac{\partial \lambda''}{\partial f'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Zweitens folgt aus den Gleichungen $\lambda = R\frac{\partial x}{\partial f}, \ldots,$ dass

$$G = \Sigma\lambda'' \frac{\partial \cdot R\frac{\partial x}{\partial f}}{\partial f'} = R\,\Sigma\lambda'' \frac{\partial^2 x}{\partial f\,\partial f'} + \frac{\partial R}{\partial f'}\,\Sigma\lambda''\frac{\partial x}{\partial f}$$

ist. Da aber $\Sigma\lambda''\frac{\partial x}{\partial f} = \frac{1}{R}\Sigma\lambda\lambda'' = 0$ ist, und der Ausdruck $\Sigma\lambda''\frac{\partial^2 x}{\partial f\,\partial f'}$ durch Vertauschung von f und f' nicht geändert wird, so folgt

$$R\,R'\Sigma\lambda''\frac{\partial^2 x}{\partial f\,\partial f'} = R'\Sigma\lambda''\frac{\partial \lambda}{\partial f'} = R\,\Sigma\lambda''\frac{\partial \lambda'}{\partial f} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Wegen der Relation (1) ist

$$R\,\Sigma\lambda''\frac{\partial \lambda'}{\partial f} = -R\,\Sigma\lambda'\frac{\partial \lambda''}{\partial f},$$

und wegen (2) sind

$$R'\Sigma\lambda\frac{\partial\lambda''}{\partial f'}=R''\Sigma\lambda\frac{\partial\lambda'}{\partial f''},\quad R\,\Sigma\lambda'\frac{\partial\lambda''}{\partial f}=R''\Sigma\lambda'\frac{\partial\lambda}{\partial f''}\cdot$$

Da nun jeder der beiden Ausdrücke links $= - R'G$ ist, so folgt

$$\Sigma\lambda\frac{\partial\lambda'}{\partial f''}=\Sigma\lambda'\frac{\partial\lambda}{\partial f''}\cdot$$

Nach (1) ist aber auch

$$\Sigma\lambda\frac{\partial\lambda'}{\partial f''}+\Sigma\lambda'\frac{\partial\lambda}{\partial f''}=0.$$

Also ist $\Sigma\lambda\frac{\partial\lambda'}{\partial f''}=0$, oder $G=0$.

Betrachten wir ferner die Summe $H=\Sigma\lambda'\frac{\partial\lambda}{\partial f'}$, so ist

$$H=\Sigma\lambda'\frac{\partial\cdot R\frac{\partial x}{\partial f}}{\partial f'}=R\,\Sigma\lambda'\frac{\partial^2 x}{\partial f\,\partial f'}=R\,\Sigma\lambda'\frac{\partial\frac{\lambda'}{R'}}{\partial f}=R\frac{\partial\frac{1}{R'}}{\partial f}\cdot$$

Differentiiert man endlich die Gleichung $\lambda^2+\mu^2+\cdots=1$ nach f', so hat man

$$\Sigma\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial f'}=0.$$

Nach dieser Vorbereitung stellen wir die n Gleichungen

$$\begin{aligned}
\lambda\ \frac{\partial\lambda}{\partial f'}+\mu\ \frac{\partial\mu}{\partial f'}+\nu\ \frac{\partial\nu}{\partial f'}+\cdots\cdot&=0,\\
\lambda'\frac{\partial\lambda}{\partial f'}+\mu'\frac{\partial\mu}{\partial f'}+\nu'\frac{\partial\nu}{\partial f'}+\cdots\cdot&=H,\\
\lambda''\frac{\partial\lambda}{\partial f'}+\mu''\frac{\partial\mu}{\partial f'}+\nu''\frac{\partial\nu}{\partial f'}+\cdots\cdot&=0,\\
\lambda'''\frac{\partial\lambda}{\partial f'}+\mu'''\frac{\partial\mu}{\partial f'}+\nu'''\frac{\partial\nu}{\partial f'}+\cdots\cdot&=0,\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

zusammen; man sieht dann sogleich, dass

$$\frac{\partial\lambda}{\partial f'}=\lambda' H,\ \frac{\partial\mu}{\partial f'}=\mu' H,\ \frac{\partial\nu}{\partial f'}=\nu' H,\ \text{etc.}$$

ist. Da wir aber $\lambda'=R'\frac{\partial x}{\partial f'}$, etc. hatten, so bekommen wir nun die Proportionen

$$\frac{\partial\lambda}{\partial f'}:\frac{\partial\mu}{\partial f'}:\frac{\partial\nu}{\partial f'}:\cdots\cdot=\frac{\partial x}{\partial f'}:\frac{\partial y}{\partial f'}:\frac{\partial z}{\partial f'}:\cdots\cdot,$$

oder, wenn $f', f'', f''', \ldots$ als konstant angenommen werden,

$$R'H = \frac{d\lambda}{dx} = \frac{d\mu}{dy} = \frac{d\nu}{dz} = \cdots\cdots = \frac{1}{\varrho} \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \quad (3)$$

Betrachten wir weiter nichts als diese $n-1$ Differentialgleichungen $\frac{d\lambda}{dx} = \frac{d\mu}{dy} = \cdots$, so ist klar, dass ihre vollständige Integration $n-1$ finite Gleichungen mit $n-1$ arbiträren Konstanten erfordert. Nehmen wir alle früheren Voraussetzungen hinzu, so kennen wir wirklich das vollständige System Integralgleichungen für (3), nämlich $f' =$ const., $f'' =$ const., $f''' =$ const., etc.; denn dieses enthält $n-1$ arbiträre Konstanten.

Die Gleichungen (3) sind uns aber auch sonst schon aus § 42 bekannt als Bedingungen für eine Hauptkrümmungsrichtung des Kontinuums $f =$ const. Wenn also in der n-fachen Totalität ein System orthogonaler Kontinua existiert, so wird jedes einzelne Kontinuum von je $n-2$ der übrigen in einer Hauptkrümmungsrichtung geschnitten. Wir wollen dieses noch strenger begründen.

Durch das System der Gleichungen (3) sind die Verhältnisse $dx : dy : dz : \ldots$ in algebraischer Weise bestimmt. Nach der obigen Herleitung von (3) würden dieselben den Verhältnissen $\lambda' : \mu' : \nu' : \ldots$ gleich sein. Da man aber nur die Funktion f zu kennen braucht, um die Gleichungen (3) bilden zu können, so ist klar, dass auch die Verhältnisse $\lambda'' : \mu'' : \nu'' : \ldots$, oder die Verhältnisse $\lambda''' : \mu''' : \nu''' : \ldots$, oder u. s. f., für $dx : dy : dz : \ldots$ gesetzt, dem System (3) genügen. Dieses hat also wenigstens $n-1$ algebraische Lösungen ($dx : dy : dz : \ldots$). Wir wissen nun schon, dass es gerade $n-1$ solche Lösungen hat; es sind die Hauptkrümmungsrichtungen. Wenn wir also die n arbiträren Konstanten durch die Substitution einer bestimmten Lösung $(x, y, \ldots)$, von der die Hauptkrümmungsrichtungen des Kontinuums $f =$ const. ausgehen sollen, fixieren und dann der Gleichung dieses Kontinuums je $n-2$ der Gleichungen $f' =$ const., $f'' =$ const., etc. beifügen, so bestimmt jede der so erhaltenen $n-1$ Gruppen von finiten Gleichungen je eine Hauptkrümmungsrichtung des ersten Kontinuums.

Wenn man in der Gleichung $\frac{1}{\varrho} = R'H$ (siehe (3)) für H seinen früher gefundenen Wert setzt, so erhält man als Hauptkrümmung des Kontinuums $f =$ const. in der Richtung der Normale des Kontinuums $f' =$ const.

$$\frac{1}{\varrho} = -R \frac{\partial \log R'}{\partial f}.$$

Die allgemeinen Betrachtungen sollen jetzt auf die **konfokalen Kontinua** angewandt werden. Da eine vollständige Schar derselben alle n Gattungen reeller Kontinua zweiten Grades enthält, und jedes Kontinuum aus einer Gattung von allen Kontinuen der übrigen Gattungen reell und orthogonal, aber von keinem derselben Gattung

geschnitten wird, so zerfällt jene vollständige Schar in n besondere Scharen, die ein vollständiges System orthogonaler Kontinua darstellen. Wenn daher in der n-fachen Totalität irgend ein reelles quadratisches Kontinuum und auf demselben eine Lösung gegeben ist, und man legt durch diese die $n-1$ konfokalen Kontinua, so wird jenes erste von irgend $n-2$ aus diesen in einer Hauptkrümmungsrichtung geschnitten. Oder kürzer ausgedrückt:

Konfokale Kontinua schneiden einander in den Hauptkrümmungsrichtungen.

Sind nun, wie früher, $A_1, A_2, \ldots A_n$ die ersten Axenquadrate konfokaler Kontinua aus n verschiedenen Gattungen, so treten diese Grössen an die Stelle von $f, f', f'', \ldots$, und wir wollen die Hauptkrümmung des Kontinuums (A_1) suchen, deren Richtung in die Normale des Kontinuums (A_2) fällt. Zunächst haben wir $R_1^2 = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)^2 + \cdots$ zu berechnen. Wenn wir die Gleichung $\frac{x^2}{A_1} + \frac{y^2}{B_1} + \cdots = 1$ nach x differentiieren, so erhalten wir $\frac{2x}{A_1} - \left(\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{B_1^2} + \cdots\right)\frac{\partial A_1}{\partial x} = 0$, oder wenn p_1 das entsprechende Perpendikel und $\lambda_1, \mu_1, \ldots$ die Richtungskosinus der Normale bezeichnen

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} = 2\frac{p_1^2 x}{A_1} = 2p_1, \lambda_1, \text{ ebenso } \frac{\partial A_1}{\partial y} = 2p_1\,\mu_1, \text{ u. s. f.;}$$

also $R_1 = 2p_1$, $R_2 = 2p_2$. Bedeutet $\frac{1}{\varrho}$ die gesuchte Hauptkrümmung, so haben wir nach der obigen allgemeinen Formel

$$\frac{1}{\varrho} = -R_1\frac{\partial \log R_2}{\partial A_1} = -2p_1\frac{\partial \log p_2}{\partial A_1},$$

oder, da $p_2^2 = \frac{A_2 B_2 C_2 \ldots.}{(A_2 - A_1)(A_2 - A_3)\ldots(A_2 - A_n)}$ ist, $\frac{1}{\varrho} = p_1\frac{\partial \log(A_2 - A_1)}{\partial A_1} = \frac{p_1}{A_2 - A_1}$,

oder endlich
$$p_1\varrho = A_1 - A_2.$$

D. h. für jede auf einem quadratischen Kontinuum gegebene Lösung L ist das Produkt des zugehörigen Perpendikels mit einem der $n-1$ Hauptkrümmungsradien gleich dem Ueberschuss eines der Axenquadrate des gegebenen Kontinuums über das gleichnamige Axenquadrat desjenigen durch L gelegten konfokalen Kontinuums, dessen Normale in die gewählte Hauptkrümmungsrichtung fällt. Oder nach dem am Ende von § 40 ausgesprochenen Satz: Die $n-1$ von der Lösung L ausgehenden Hauptkrümmungsrichtungen sind parallel mit den Axen des zu L konjugierten diametralen Schnitts, und die Quadrate dieser Axen sind resp. gleich den Produkten des zu L gehörenden

Perpendikels mit den entsprechenden Hauptkrümmungsradien. Hieraus folgt leicht, dass überhaupt das Quadrat irgend eines Halbmessers des diametralen Schnitts gleich ist dem Produkt des Perpendikels mit dem Radius der Krümmung von paralleler Richtung: — ein Satz, der auch unmittelbar bewiesen werden kann.

§ 44. *Allgemeine Betrachtungen über die Existenz orthogonaler Kontinua; Konstruktion eines ganz beliebigen Systems orthogonaler Flächen im Raume.*

I. Während für den Raum die Untersuchung über die Bedingungen der Existenz eines beliebigen Systems orthogonaler Kontinua völlig erledigt werden kann, unterliegt sie für eine mehr als dreifache Totalität bedeutenden Schwierigkeiten. Man erwarte daher hier keine Entscheidung der Frage, ob z. B. in der vierfachen Totalität noch andere Systeme orthogonaler Kontinuen existieren ausser den konfokalen; sondern der Zweck dieses Paragraphen ist nur, die erwähnten Schwierigkeiten in den einfachsten Ausdrücken darzulegen. Für den Raum hingegen werde ich am Schluss dieses Paragraphen als Anwendung der allgemeinen Formeln die Konstruktion eines Systems orthogonaler Flächen zeigen, wenn eine einzige derselben beliebig gegeben ist. Ob diese Konstruktion neu ist, weiss ich nicht, da mir die Originalabhandlungen, worin der Begriff der orthogonalen Flächen zuerst erörtert ward, nicht zugänglich gewesen sind.

Wenn die n Funktionen $f, f', f'', \ldots$ ein orthogonales System in der n-fachen Totalität darstellen, so muss, da nach der Bezeichnungsweise des vorigen Paragraphen $df' = R'(\lambda' dx + \mu' dy + \cdots)$ ist, die Differentialgleichung

$$\lambda' dx + \mu' dy + \nu' dz + \cdots = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

integrabel sein. Die Zahl der hierdurch geforderten Bedingungen ist

$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + \frac{1}{2}n(n-1) - (n-1)$$

und stimmt daher mit der Zahl der in der Natur der Aufgabe liegenden Bedingungen für die Funktion f überein; denn wir hatten ursprünglich $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen, worin die $n-1$ Funktionen $f', f'', \ldots$ zu eliminieren sind. Da ferner $\lambda', \mu', \ldots$ die Richtungskosinus einer Hauptkrümmung des Kontinuums $f =$ const. und daher aus § 42 uns als irrationale Funktionen der partiellen Differentialkoeffizienten erster und zweiter Ordnung von f bekannt sind, deren Verhältnisse sämtlich in rationalen Funktionen einer und derselben Wurzel einer algebraischen Gleichung $(n-1)$-ten Grades ausgedrückt werden können, so muss auch jede der erwähnten Integrabilitätsbedingungen, von der

Irrationalität befreit, als partielle Differentialgleichung dritter Ordnung in Bezug auf die unbekannte Funktion f sich darstellen lassen; und man wird sich aus der Form der Gleichungen (a) § 42 leicht davon überzeugen, dass sie in Beziehung auf die Differentialkoeffizienten dritter Ordnung höchstens auf den (n — 1)-ten Grad steigen wird. Haben wir aber einmal die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Integrabilitätsbedingungen der Differentialgleichung (4) in rationaler Form, so ist sofort klar, dass in denselben auch diejenigen für die übrigen Gleichungen $\lambda'' dx + \mu'' dy + \cdots = 0$, etc. schon mitbegriffen sind. Wir hätten demnach für die gesuchte Funktion f wirklich nur dieselbe Zahl $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ von Bedingungen zu erfüllen, welche die Natur der Aufgabe auf den ersten Blick zu erfordern scheint. Wir sollten es aber im allgemeinen für unmöglich halten, dass eine einzige Funktion mehrern partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung zugleich genügen könnte, wenn nicht die Existenz der orthogonalen Kontinuen uns faktisch von der Möglichkeit überzeugte. Es wäre daher höchst interessant, wenn es gelänge, a priori von den partiellen Differentialgleichungen aus zu entscheiden, ob ausser den konfokalen Kontinuen noch andere orthogonale Systeme existieren oder nicht, und im letzten Falle aus den Bedingungen mit Notwendigkeit auf die konfokalen Kontinuen zu schliessen. Das Wenige, was nun folgen wird, steht freilich weit hinter diesem Ziele zurück.

Wir wollen sämtliche Integrabilitätsbedingungen der Gleichung (4) in einer einzigen Formel zusammenfassen, und um für diesen Zweck die Bezeichnung möglichst abzukürzen, setzen wir

$$\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x, \frac{\partial}{\partial y} = \partial_y, \cdots, \lambda \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y} + \cdots = D,$$

wo $\lambda, \mu, \ldots$ die zugleich mit der Funktion f gegebenen Richtungskosinus der Normale sind; und, um auch für das Auge die in irrationaler Weise bestimmten Hauptkrümmungsrichtungskosinus von jenen scharf zu unterscheiden und unsre gänzliche Unbekanntschaft mit den Funktionen $f', f'', \ldots$ anzuzeigen, bezeichnen wir diese $n-1$ Kosinusreihen mit $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, $(\alpha', \beta', \gamma', \ldots)$, etc. und setzen ferner

$$\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} + \cdots = d, \quad \alpha' \frac{\partial}{\partial x} + \beta' \frac{\partial}{\partial y} + \cdots = d', \text{ etc.},$$

so dass, wenn $\varrho, \varrho', \varrho'', \ldots$ die entsprechenden Hauptkrümmungsradien bedeuten,

$$\frac{d\lambda}{\alpha} = \frac{d\mu}{\beta} = \frac{d\nu}{\gamma} = \cdots = \frac{1}{\varrho}, \quad \frac{d'\lambda}{\alpha'} = \frac{d'\mu}{\beta'} = \cdots = \frac{1}{\varrho'}, \text{ etc.}$$

wird; endlich gebrauchen wir $n-3$ unter sich unabhängige Reihen von je n beliebigen



Grössen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1, \ldots; \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \ldots;$ etc.; $\mathfrak{a}_{n-3}, \mathfrak{b}_{n-3}, \ldots$ Wird nun über die Zeichen der Variabeln, auf welche die Operationen $D, d, d', \ldots$ einzig ausgeübt werden sollen, ein horizontaler Strich gesetzt, so sind sämtliche Integrabilitätsbedingungen der Gleichung $\alpha\, d\, x + \beta\, d\, y + \cdots = 0$ in der Formel

$$U = \begin{vmatrix} \partial_x & . \ \partial_y & . \ \partial_z & \ldots\ldots \\ \alpha & . \ \beta & . \ \gamma & \ldots\ldots \\ \bar\alpha & . \ \bar\beta & . \ \bar\gamma & \ldots\ldots \\ \mathfrak{a}_1 & . \ \mathfrak{b}_1 & . \ \mathfrak{c}_1 & \ldots\ldots \\ \mathfrak{a}_2 & . \ \mathfrak{b}_2 & . \ \mathfrak{c}_2 & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \mathfrak{a}_{n-3} & . \ \mathfrak{b}_{n-3} & . \ \mathfrak{c}_{n-3} & \ldots\ldots \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

vereinigt. Denn man würde z. B. die Integrabilitätsbedingung

$$\alpha \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial y}\right) + \beta \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial z}\right) + \gamma \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) = 0$$

aus (5) erhalten, wenn man $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2 = \cdots = \mathfrak{a}_{n-3} = 0$, $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}_2 = \cdots = \mathfrak{b}_{n-3} = 0$, $\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c}_2 = \cdots = \mathfrak{c}_{n-3} = 0$ setzte. Wir können nun der Determinante U eine andere Gestalt geben, wenn wir die nicht überstrichenen Variabeln $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ durch Determinanten $(n-1)$-ter Ordnung ersetzen. Wenn nämlich

$$\varDelta = \Sigma \pm \lambda\, \beta\, \gamma' \delta'' \varepsilon''' \ldots$$

die Determinante aller orthogonalen Transformationselemente $\lambda, \mu, \ldots; \alpha, \beta, \ldots; \alpha', \beta', \ldots; \alpha''$, $\beta'' \ldots$; etc. bezeichnet, deren Wert bekanntlich $+1$ oder -1 sein kann, und wir uns für die Annahme des positiven Werts entscheiden, so ist, wenn die Differentialkoeffizienten rein formell verstanden werden, $\alpha = \frac{\partial \varDelta}{\partial \bar\alpha}$, $\beta = \frac{\partial \varDelta}{\partial \bar\beta}$, etc.; daher

$$U = \left\| \begin{matrix} \partial_x & . \ \partial_y & . \ \partial_z & \ldots \\ \bar\alpha & . \ \bar\beta & . \ \bar\gamma & \ldots \\ \mathfrak{a}_1 & . \ \mathfrak{b}_1 & . \ \mathfrak{c}_1 & \ldots \\ \mathfrak{a}_2 & . \ \mathfrak{b}_2 & . \ \mathfrak{c}_2 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} \lambda & . \ \mu & . \ \nu & \ldots \\ \alpha' & . \ \beta' & . \ \gamma' & \ldots \\ \alpha'' & . \ \beta'' & . \ \gamma'' & \ldots \\ \alpha''' & . \ \beta''' & . \ \gamma''' & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} D & . \ d' & . \ d'' & \ldots \\ (\lambda \bar\alpha) & . \ (\alpha' \bar\alpha) & . \ (\alpha'' \bar\alpha) & \ldots \\ (\lambda\, \mathfrak{a}_1) & . \ (\alpha'\, \mathfrak{a}_1) & . \ (\alpha''\, \mathfrak{a}_1) & \ldots \\ (\lambda\, \alpha_2) & . \ (\alpha'\, \mathfrak{a}_2) & . \ (\alpha''\, \mathfrak{a}_2) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

wo abkürzend z. B. $(\alpha\, \mathfrak{a}) = \lambda\, \mathfrak{a} + \mu\, \mathfrak{b} + \nu\, \mathfrak{c} + \cdots$ gesetzt ward. Im ersten durch einen einfachen mittlern Vertikalstrich in zwei Hälften geschiedenen Schema enthält jede Hälfte $n-1$ Horizontalzeilen mit je n Elementen. Das Schema bedeutet, dass man in

beiden Hälften je zwei gleichnamige Vertikalzeilen weglassen, die zwei Determinanten der übrigen Elemente miteinander multiplizieren und die Summe der so entstandenen n Produkte nehmen solle. Diese Summe wird nun bekanntlich auch erhalten, wenn man die Elemente irgend einer Horizontalzeile der ersten Hälfte des Schemas mit den in irgend einer Horizontalzeile der zweiten Hälfte enthaltenen gleichnamigen Elementen multipliziert, die Produkte addiert und aus allen solchen Produktsummen die Determinante bildet. In der zweiten Horizontalzeile dieser Determinante steht $(\lambda\,\bar{\alpha})$ als erstes Element; da es mit dem Operationszeichen D in der gleichen Vertikalzeile liegt, so können auf dasselbe nur die übrigen mit d', d'', ... bezeichneten Operationen ausgeübt werden. Nun ist $\lambda\,\alpha + \mu\,\beta \cdots = 0$, also

$$0 = d'(\bar{\lambda}\,\bar{\alpha}) = d'(\bar{\lambda}\,\alpha) + d'(\lambda\,\bar{\alpha}), \text{ oder } d'(\lambda\,\bar{\alpha}) = -\Sigma\,\alpha\,d'\lambda;$$

aber $d'\lambda = \frac{\alpha'}{\varrho'}, \cdots$; also $d'(\lambda\bar{\alpha}) = -\frac{\alpha\,\alpha' + \beta\,\beta' + \cdots}{\varrho'} = 0$, ebenso $d''(\lambda\,\bar{\alpha}) = 0$, u. s. f. Man kann also in der letzten mit U äquivalenten Determinante das Element $(\lambda\,\bar{\alpha})$ geradezu durch 0 ersetzen. Da man ferner die $n\,(n-3)$ freien Grössen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ immer so wählen kann, dass in der betrachteten Determinante $(n-1)$-ter Ordnung jedes in den $n-3$ letzten Horizontalzeilen vorkommende Element einen willkürlich gegebenen Wert erhält, dass z. B. alle in irgend zweien Vertikalzeilen vorkommenden Elemente gleich Null werden, so folgt aus $U = 0$, dass alle im Schema

$$\left\| \begin{matrix} D & . & d' & . & d'' & . & d''' & \ldots\ldots \\ 0 & . & (\alpha'\,\bar{\alpha}) & . & (\alpha''\bar{\alpha}) & . & (\alpha'''\bar{\alpha}) & \ldots\ldots \end{matrix} \right\| \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

enthaltenen Determinanten zweiter Ordnung einzeln verschwinden; und umgekehrt, aus (6) folgt (5) oder die Integrabilität der Differentialgleichung $\alpha\,d\,x + \beta\,d\,y + \cdots = 0$. Wir bekommen also $n-2$ Gleichungen

$$\alpha' D\,\alpha + \beta' D\,\beta + \cdots = 0, \quad \alpha'' D\,\alpha + \beta'' D\beta + \cdots = 0, \text{ etc.} \quad \ldots \quad (7)$$

und $\frac{1}{2}\,(n-2)\,(n-3)$ Gleichungen

$$\alpha'' d'\alpha + \beta'' d'\beta + \cdots = \alpha' d''\alpha + \beta' d''\beta + \cdots, \text{ etc.} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

In der Absicht, diesen Gleichungen eine Form zu geben, worin die dritten Differentialkoeffizienten der Funktion f sichtbar hervortreten, führen wir zuvor einige Abkürzungen ein. Wenn z. B. die Polynome $\alpha\,x + \beta\,y + \gamma\,z + \cdots$ und $\lambda\,x + \mu\,y + \nu\,z + \cdots$ mit einander multipliziert und im entwickelten Produkt Glieder wie $x^2, x\,y$ resp. durch $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}$ ersetzt werden, so soll die entsprechende zusammengesetzte Operation durch

$(d\,.\,D)$ oder $(D\,.\,d)$ bezeichnet werden; die Elemente der operativen Polynome D, d werden dann wie Konstanten behandelt, und bei ihrer Multiplikation wird den Operationen selbst kein gegenseitiger Einfluss verstattet. Bezieht sich hingegen z. B. die Operation D nur auf die Elemente des operativen Polynoms d, so soll die daraus hervorgehende neue Operation durch $\overline{D\,d}$ bezeichnet sein. Es wäre demnach, wenn φ irgend eine Funktion der Variabeln $x, y, \ldots$ bezeichnet,

$$\overline{D\,d}\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} D\,\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y} D\,\beta + \cdots, \text{ aber } \overline{d\,D}\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} d\,\lambda + \frac{\partial\varphi}{\partial y} d\,\mu + \cdots$$

Dieses vorausgesetzt, ist z. B.

$$D\,(d\,\varphi) = (D\,.\,d)\,\varphi + \overline{D\,d}\,\varphi,$$
$$D\,((d\,.\,d')\,\varphi) = (D\,.\,d\,.\,d')\,\varphi + (d'\,.\,\overline{D\,d})\,\varphi + (d\,.\,\overline{D\,d'})\,\varphi,$$

u. s. f. Die zusammengesetztern Anwendungen dieser Bezeichnungsart werden sich nun leicht von selbst verstehen.

Mit Rücksicht auf

$$R^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \cdots, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = R\,\lambda, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = R\,\mu, \ldots, \lambda\,\alpha + \mu\,\beta + \cdots = 0, \text{ etc.}$$

erhält man leicht

$$Df = R, \quad df = 0, \quad d'f = 0, \quad d''f = 0, \text{ etc.}$$

Wenn nun δ irgend ein lineares operatives Polynom bedeutet, so ist

$$\overline{\delta\,D}\,f = \Sigma\,\frac{\partial f}{\partial x}\,\delta\,\lambda = R\,\Sigma\,\lambda\,\delta\,\lambda = 0 \text{ wegen } \lambda^2 + \mu^2 + \cdots = 1,$$
$$\overline{\delta\,d}\,f = \Sigma\,\frac{\partial f}{\partial x}\,\delta\,\alpha = R\,\Sigma\,\lambda\,\delta\,\alpha = -\,R\,\Sigma\,\alpha\,\delta\,\lambda.$$

Man hat daher, weil $\delta\,(Df) = (D\,.\,\delta) f + \overline{\delta\,D}\,f$, u. s. f.,

$$(D\,.\,\delta) f = \delta\,R, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9) \qquad\qquad (d\,.\,\delta) f = R\,\Sigma\,\alpha\,\delta\,\lambda, \text{ etc.} \quad . \quad . \quad (10)$$

Setzt man in der zweiten Formel $\delta = d'$ und erinnert sich, dass $d\,\lambda = \frac{\alpha}{\varrho}$, etc., so erhält man

$$(d\,.\,d') f = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Es ist ferner

$$(d\,.\,\overline{\delta d'})f = \Sigma\,\delta\,\alpha'\,.\,d\,\frac{\partial f}{\partial x} = \Sigma\,\delta\,\alpha'\,.\,(\lambda\,d\,R + R\,d\,\lambda) = d\,R\,.\,\Sigma\,\lambda\,\delta\,\alpha' + \frac{R}{\varrho}\,\Sigma\,\alpha\,\delta\,\alpha',$$

oder, da $(d'\,.\,\delta)f = R\,\Sigma\,\alpha'\delta\,\lambda = -R\,\Sigma\,\lambda\,\delta\,\alpha'$, auch

$$(d\,.\,\overline{\delta d'})f = -\frac{d\,R}{R}\,(d'\,.\,\delta)\,f - \frac{R}{\varrho}\,\Sigma\,\alpha'\delta\,\alpha.$$

Wendet man aber die Operation δ auf die Gleichung (11) an, so bekommt man

$$(d\,.\,d'\,.\,\delta)f + (d\,.\,\overline{\delta\,d'})f + (d'\,.\,\overline{\delta\,d})f = 0.$$

Daher ist

$$(d\,.\,d'\,.\,\delta)f = \frac{dR}{R}\,(d'\,.\,\delta)f + \frac{d'R}{R}\,(d\,.\,\delta)f + R\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}\right)\Sigma\,\alpha'\delta\,\alpha. \quad .\ .\ (12)$$

Setzt man hier zuerst $\delta = D$, dann $\delta = d''$, und berücksichtigt die Gleichungen (9) und (11), so erhält man

$$(D\,.\,d\,.\,d')f = 2\,\frac{d\,R\,.\,d'R}{R} + R\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}\right)\Sigma\,\alpha'D\,\alpha, \quad .\ .\ .\ .\ .\ (13)$$

$$(d\,.\,d'\,.\,d'')f = R\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}\right)\Sigma\,\alpha'd''\alpha. \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (14)$$

Da in (14) links die Symbole d, d', d'' permutiert werden dürfen, so ergeben sich rechts sechs verschiedene Ausdrücke; unter anderm hat man

$$\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}\right)\Sigma\,\alpha'd''\alpha = \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho''}\right)\Sigma\,\alpha''d'\alpha. \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (15)$$

Die Formel (13) kann auf folgende Weise vereinfacht werden. Es ist

$$(d\,.\,d')\,R = (d\,.\,d')\,(Df) = \Sigma\,(d\,.\,d')\left(\lambda\,\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$= \Sigma\,(d\,.\,d')\,\lambda\,.\,\frac{\partial f}{\partial x} + \Sigma\,d\,\lambda\,.\,d'\,\frac{\partial f}{\partial x} + \Sigma\,d'\lambda\,.\,d\,\frac{\partial f}{\partial x} + \Sigma\,\lambda\,(d\,.\,d')\,f$$

$$= R\,\Sigma\,\lambda\,(d\,.\,d')\,\lambda + \Sigma\,d\,\lambda\,.\,(\lambda\,d'R + R\,d'\lambda) + \Sigma\,d'\lambda\,.\,(\lambda\,d\,R + R\,d\,\lambda) + (D\,.\,d\,.\,d')\,f.$$

Da nun überhaupt $\Sigma\,\lambda\,\delta\,\lambda = 0$ und daher $\Sigma\,\lambda\,(\delta\,.\,\delta')\,\lambda + \Sigma\,\delta\,\lambda\,.\,\delta'\lambda = 0$, so ist

$$\Sigma\,\lambda\,(d\,.\,d')\,\lambda = -\Sigma\,d\,\lambda\,.\,d'\lambda = -(\Sigma\,\alpha\,\alpha') : \varrho\,\varrho' = 0;$$

folglich

$$(d\,.\,d')\,R = (D\,.\,d\,.\,d')\,f.$$

Nun ist ferner $(d\,.\,d')\,\frac{1}{R} = -\frac{(d\,.\,d')\,R}{R^2} + 2\,\frac{d\,R\,.\,d'R}{R^3}$. Wenn man also die Gleichung (13) durch R^2 dividiert, so ergiebt sich

$$(d\,.\,d')\,\frac{1}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho}\right)\Sigma\,\alpha' D\,\alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Wenden wir jetzt diese allgemeinen Formeln auf die transformierten Integrabilitätsbedingungen (7) und (8) an, so ergiebt sich namentlich aus der Vergleichung von (8) mit (15), da im allgemeinen ϱ' und ϱ'' verschieden sein werden, offenbar $\Sigma\,\alpha' d''\alpha = 0$. Daher haben wir jetzt

$$(d\,.\,d')\,\frac{1}{R} = 0,\ (d\,.\,d'')\,\frac{1}{R} = 0,\ \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad (17) \qquad (n-2 \text{ Gleichungen})$$

$$(d\,.\,d'\,.\,d'')f = 0,\ (d\,.\,d'\,.\,d''')f = 0,\ \text{etc.},\ (d\,.\,d''\,.\,d''')f = 0,\ \text{etc.}\ (18) \ \left(\binom{n-2}{2} \text{ Gleichungen}\right)$$

als Bedingungen der Integrabilität der Gleichung $\alpha\,d\,x + \beta\,d\,y + \cdots = 0$. Da z. B.

$$(d\,.\,d'\,.\,d'')\,f = \alpha\,\alpha'\alpha''\,\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + (\alpha'\alpha''\beta + \alpha\,\alpha''\beta' + \alpha\,\alpha'\beta'')\,\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y} + \text{etc.}$$

ist, so sind die Gleichungen (18) in Beziehung auf die dritten Differentialkoeffizienten von f linear und homogen, aber in Beziehung auf die ersten und zweiten irrational. Will man auch in den Gleichungen (17) die dritten Differentialkoeffizienten sichtbar machen, so bringe man sie unter die Form

$$(D\,.\,d\,.\,d')\,f = 2\,\frac{d\,R\,.\,d'R}{R}.$$

Da auch die übrigen Differentialgleichungen $\alpha' d\,x + \beta' d\,y + \cdots = 0$, etc. integrabel sein müssen, so bekommen wir im ganzen so viele Bedingungsgleichungen von der Form $(d\,.\,d')\,\frac{1}{R} = 0$, als die $n-1$ Symbole $d, d', d'', d''', \ldots$ zu zweien, und so viele von der Form $(d\,.\,d'\,.\,d'')f = 0$, als dieselben Symbole zu dreien kombiniert werden können, im ganzen also $\binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3} = \binom{n}{3}$ Bedingungen. Es liegt also die schwierige Aufgabe vor, nachzuweisen, dass alle diese $\binom{n}{3}$ Bedingungen schon in den $\binom{n-1}{2}$ Gleichungen (17) und (18) enthalten seien, eine Aufgabe, für deren Lösung ich durchaus keinen Rat weiss.

Wir wollen nun annehmen, die Form der Funktion f, welche der Aufgabe vollkommen genügt, sei verloren gegangen; aber aus der ganzen Schar der durch $f = \text{const.}$

dargestellten Kontinua sei ein einziges für unsre Anschauung zurückgeblieben und durch die Gleichung $V=0$ dargestellt, welche explicite nur die n Variabeln $x, y, z, \ldots$ enthält. Wir müssen uns dann V auch implicite als Funktion von f denken, in der aber durch die Annahme eines konstanten Werts für f und Verschmelzung desselben mit allen andern Konstanten jede Spur der Funktionsweise in Beziehung auf f ausgelöscht ist. Welchen Bedingungen wird die Funktion V genügen müssen, damit das entsprechende einzelne Kontinuum einer Schar angehören könne, welche fähig ist, einem orthogonalen Systeme sich einzureihen?

Wird V nicht nur explicite, sondern auch implicite vermittelst f als Funktion von $x, y, \ldots$ aufgefasst, so ist V mit Null identisch; daher wird auch jede ableitende Operation ein mit Null identisches Resultat liefern. Wird V so aufgefasst, so soll es durch $\overline{V}$ bezeichnet werden; sonst aber mögen alle ableitenden Operationen nur explicite verstanden werden und unter sich unabhängig sein. Werden sie mit $\delta, \delta', \delta''$ bezeichnet, so ist

$$\delta \overline{V} = \left(\delta + \delta f \cdot \frac{\partial}{\partial f}\right) V = 0,$$

$$\delta \delta' \overline{V} = \left(\delta + \delta f \cdot \frac{\partial}{\partial f}\right)\left(\delta' + \delta' f \cdot \frac{\partial}{\partial f}\right) V + \delta \delta' f \cdot \frac{\partial V}{\partial f} = 0,$$

$$\delta \delta' \delta'' \overline{V} = \left(\delta + \delta f \cdot \frac{\partial}{\partial f}\right)\left(\delta' + \delta' f \cdot \frac{\partial}{\partial f}\right)\left(\delta'' + \delta'' f \cdot \frac{\partial}{\partial f}\right) V$$

$$+ \delta' \delta'' f \cdot \left(\delta + \delta f \cdot \frac{\partial}{\partial f}\right)\frac{\partial V}{\partial f} + \delta \delta'' f \cdot \left(\delta' + \delta' f \cdot \frac{\partial}{\partial f}\right)\frac{\partial V}{\partial f} + \delta \delta' f \cdot \left(\delta'' + \delta'' f \cdot \frac{\partial}{\partial f}\right)\frac{\partial V}{\partial f} + \delta \delta' \delta'' f \cdot \frac{\partial V}{\partial f} = 0.$$

Setzt man in der ersten Gleichung $\delta = D$, so erhält man

$$DV + R\frac{\partial V}{\partial f} = 0. \qquad (19)$$

Werden in der dritten Gleichung $\delta, \delta', \delta''$ durch d, d', d'' ersetzt, so ergiebt sich vermöge der von speziellen Voraussetzungen unabhängigen Gleichung (11)

$$(d\,.\,d'.\,d'')\ V + (d\,.\,d'.\,d'') f \cdot \frac{\partial V}{\partial f} = 0. \qquad (20)$$

Da $\frac{\partial V}{\partial f}$ unbekannt ist, so reicht die Gleichung (19) zur Bestimmung der Funktion R nicht hin; die Gleichung (20) hingegen verglichen mit (18) giebt $(d\,.\,d'.\,d'')\ V = 0$.

Wenn also das einzelne Kontinuum $V=0$ einem orthogonalen System soll angehören können, so müssen erstens alle $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3}$ in der Form $(d\,.\,d'.\,d'')V = 0$ begriffenen Bedingungen erfüllt sein, und zweitens dürfen

die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von der Form $(d\,.\,d')\,\frac{1}{R}=0$, durch welche die unbekannte Funktion R der n Variabeln $x, y, \ldots$ bestimmt wird, einander nicht widersprechen.

Obgleich nach § 42 die Elemente $\lambda, \mu, \ldots, \alpha, \beta, \ldots, \alpha', \beta', \ldots$ der operativen Polynome $D, d, d', \ldots$ als Richtungskosinus der Normale und der Hauptkrümmungen des Kontinuums $V=0$ ihren Werten nach bekannt sind, so sind uns doch ihre Funktionsweisen wegen des Verlusts der Funktion f gänzlich unbekannt; und wenn wir auch die genannten Elemente durch Funktionen aller n Variabeln $x, y, \ldots$ ausdrücken, ohne irgend eine Substitution oder Elimination mittelst der Gleichung $V=0$ anzuwenden, so haben wir doch lauter unechte Funktionsweisen, welche sich ändern, so oft wir dasselbe Kontinuum durch eine von $\varphi(V)=\varphi(0)$ verschiedene Gleichungsform darstellen, wie z. B. $x-\psi(y, z, \ldots)=0$. Daher sind alle Variationen willkürlich, welche Richtungen entsprechen, die vom gegebenen Kontinuum $V=0$ sich entfernen; und ihren Werten nach bestimmt sind nur diejenigen Variationen, welche tangierenden Richtungen entsprechen; zu diesen gehören nun allerdings die mit $d, d', \ldots$ bezeichneten Variationen, zu jenen unbestimmten hingegen die Variation D. Diese Betrachtungen mögen anschaulich zeigen, dass man allerdings, wenn die Werte einer Funktion $\frac{1}{R}=W$ nur für jede dem Kontinuum $V=0$ angehörende Lösung bekannt sind, die Differentialgleichung $(d\,.\,d')\,W=0$ in der ganzen Ausdehnung dieses Kontinuums verifizieren kann, wenn anders W derselben genügt. Denn da d' einer tangierenden Richtung entspricht, so ist $d'W$ überall auf dem Kontinuum bekannt, daher auch $d\,(d'W)$. Da ferner $\alpha', \beta', \ldots$ überall auf dem Kontinuum bekannt sind, so sind es auch $d\alpha', d\beta', \ldots$. Die diesen Elementen entsprechende Richtung tangiert aber, weil $\Sigma\lambda\, d\alpha' = -\Sigma\alpha'\, d\lambda = -\frac{1}{\varrho}\Sigma\alpha\alpha' = 0$. Daher ist auch $\overline{d\,d'}\,W$ überall auf dem Kontinuum bekannt; also ist es endlich auch $(d\,.\,d')\,W = d\,(d'W) - \overline{d\,d'}\,W$. Da ferner leicht gezeigt werden kann, dass überhaupt

$$(d\,.\,d'd'')\,V = DV\cdot\left(\frac{1}{\varrho'}-\frac{1}{\varrho''}\right)\Sigma\alpha''\,d\alpha',$$

so sieht man sogleich ein, dass auch die Gleichung $(d\,.\,d'.\,d'')\,V=0$ auf dem ganzen gegebenen Kontinuum verifiziert werden kann, indem man sie durch $\Sigma\alpha''\,d\alpha'=0$ ersetzt.

Die partielle Differentialgleichung $(d\,.\,d')\,W=0$ z. B. enthält eigentlich eine unabhängige Variable zu viel. Will man dieselbe nicht bloss gleichsam graphisch verifizieren, sondern sie auf eine echte analytische Form bringen, so kann man, um möglichst allgemein zu verfahren, jede der n Variabeln $x, y, \ldots$ so in Funktion von n neuen Variabeln $t_1, t_2, \ldots t_n$ ausdrücken, dass $t_n=$ const. dasselbe Kontinuum, wie $V=0$, darstellt. Es ist dann möglich, alle nach $x, y, \ldots$ genommenen partiellen Differentialkoeffizienten durch solche, die nach $t_1, t_2, \ldots t_n$ genommen sind, auszudrücken; und

zuletzt wird man anstatt $(d \,.\, d')W = 0$ eine Gleichung erhalten, worin nur die nach den $n-1$ Variabeln $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ genommenen partiellen Differentialkoeffizienten erster und zweiter Ordnung von $x, y, \ldots, W$ vorkommen.

Um dieses Verfahren durch ein leichtes Beispiel zu erläutern, legen wir den Raum mit den drei orthogonalen Koordinaten x, y, z zu Grunde, und denken uns diese als solche Funktionen der drei neuen Variabeln t, u, v, dass $v =$ const. eine krumme Fläche, und überdies, was angeht und zur Vereinfachung beiträgt, $u =$ const. die der Richtung (α, β, γ) entsprechende, $t =$ const. die andere Krümmungslinie darstellt. Es sei dann $\frac{\partial x}{\partial t} = p\,\alpha$, $\frac{\partial y}{\partial t} = p\,\beta$, $\frac{\partial z}{\partial t} = p\,\gamma$; $\frac{\partial x}{\partial u} = q\,\alpha'$, $\frac{\partial y}{\partial u} = q\,\beta'$, $\frac{\partial z}{\partial u} = q\,\gamma'$; (λ, μ, ν) die Richtung der Normale. Da nun $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\alpha}{\varrho}, \ldots, \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{\alpha'}{\varrho'}, \ldots$, so ist leicht nachzuweisen, dass

$$\lambda \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial u} + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t\, \partial u} + \nu \frac{\partial^2 z}{\partial t\, \partial u} = 0$$

ist, d. h., dass die den Elementen $\frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial u}, \cdots$ entsprechende Richtung die Fläche tangiert. Man darf daher setzen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial u} = T \frac{\partial x}{\partial t} + U \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t\, \partial u} = T \frac{\partial y}{\partial t} + U \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t\, \partial u} = T \frac{\partial z}{\partial t} + U \frac{\partial z}{\partial u},$$

indem von diesen drei Gleichungen immer eine die notwendige Folge der zwei übrigen ist; und T, U sind als bekannte Funktionen von t, u anzusehen. Nun ist

$$d' W = \frac{1}{q} \frac{\partial W}{\partial u}, \quad d\,(d' W) = \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{q} \frac{\partial W}{\partial u} \right),$$

$$\overline{d\, d'}\, W = \frac{1}{p} \Sigma \frac{\partial \alpha'}{\partial t} \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{p} \Sigma \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{q} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{p} \frac{\partial \frac{1}{q}}{\partial t} \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{1}{pq} \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial u} \frac{\partial W}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{p} \frac{\partial \frac{1}{q}}{\partial t} \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{1}{pq} \left(T \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial u} \right);$$

man erhält also zuletzt

$$p\, q (d \,.\, d')\, W = \frac{\partial^2 W}{\partial t\, \partial u} - T \frac{\partial W}{\partial t} - U \frac{\partial W}{\partial u} = 0,$$

eine partielle Differentialgleichung mit bloss 2 unabhängigen Variabeln.

Um den Gang der folgenden auf den Raum bezüglichen speziellen Erörterung nicht zu unterbrechen, wollen wir hier noch eine allgemeine Relation voranschicken. Setzt man in (10) $\delta = d$, so ergiebt sich



$$(d\,.\,d)f = R\,\Sigma\alpha\,d\,\lambda = \frac{R}{\varrho};$$

thut man das Gleiche in (12), so bekommt man mit Rücksicht auf (11)

$$(d\,.\,d\,.\,d')f = \frac{d'R}{\varrho} + R\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}\right)\Sigma\,\alpha' d\,\alpha.$$

Wendet man aber die Operation d' auf die vorletzte Gleichung an, so hat man

$$d'\,\frac{R}{\varrho} = (d\,.\,d\,.\,d')f + 2\,(d\,.\,\overline{d'd})\,f.$$

Hier ist

$$(d\,.\,\overline{d'd})f = \Sigma\,d'\alpha\,.\,d\,\frac{\partial f}{\partial x} = \Sigma\,d'\alpha\,(\lambda\,d\,R + R\,d\,\lambda) = -\,d\,R\,.\,\Sigma\,\alpha\,d'\lambda + \frac{R}{\varrho}\,\Sigma\,\alpha\,d'\alpha = 0;$$

also

$$(d\,.\,d\,.\,d')f = \frac{d'R}{\varrho} - \frac{R}{\varrho^2}\,d'\varrho.$$

Durch Vergleichung der zwei Ausdrücke für $(d\,.\,d\,.\,d')f$ ergiebt sich demnach

$$\Sigma\,\alpha\,d\,\alpha' = \frac{\varrho' d' \log \varrho}{\varrho' - \varrho},$$

folglich auch

$$\Sigma\,\alpha' d'\alpha = \frac{\varrho\,d\log\varrho'}{\varrho - \varrho'}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

ein Ausdruck, den man als Wert einer Hauptkrümmung des Kontinuums mit der Normale $(\alpha, \beta, \ldots)$, und zwar nach der Richtung $(\alpha', \beta', \ldots)$ hin, auffassen kann.

II. Anwendung auf den Raum. Für $n = 3$ giebt es nur die einzige Bedingung $(d\,.\,d')\,\frac{1}{R} = 0$. Da nun überhaupt

$$(d\,.\,d') = \Sigma\,\alpha\,\alpha'\,\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Sigma\,(\alpha\,\beta' + \alpha'\beta)\,\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}$$

ist, so muss für $n = 3$ die Irrationalität wegfallen. Es sei $\alpha\,\alpha' = A$, $\beta\,\beta' = B$, $\gamma\,\gamma' = C$, $\beta\,\gamma' + \beta'\gamma = D$, $\gamma\,\alpha' + \gamma'\alpha = E$, $\alpha\,\beta' + \alpha'\beta = F$, so gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2\,\lambda\,A + \mu\,F + \nu\,E &= 0, \\ \lambda\,F + 2\,\mu\,B + \nu\,D &= 0, \\ \lambda\,E + \mu\,D + 2\,\nu\,C &= 0, \end{aligned}$$

aus denen sich leicht

$$\left.\begin{aligned} \mu\nu D &= \lambda^2 A - \mu^2 B - \nu^2 C, \\ \nu\lambda E &= -\lambda^2 A + \mu^2 B - \nu^2 C, \\ \lambda\mu F &= -\lambda^2 A - \mu^2 B + \nu^2 C \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

ergiebt. Wenn man ferner die zwei Gleichungen

$$\alpha \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \beta \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{\alpha}{\varrho}, \quad \alpha' \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \beta' \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \gamma' \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{\alpha'}{\varrho'}$$

resp. mit α', α multipliziert und addiert, so erhält man

$$2 A \frac{\partial \lambda}{\partial x} + F \frac{\partial \lambda}{\partial y} + E \frac{\partial \lambda}{\partial z} = A\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}\right), \text{ oder, da } \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} \text{ ist,}$$

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \nu}{\partial z}\right) A + \frac{\partial \lambda}{\partial z} E + \frac{\partial \lambda}{\partial y} F = 0.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\lambda\mu\nu$, eliminiert E und F mittelst (22), setzt

$$\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial x} = -\mu \frac{\partial \mu}{\partial x} - \nu \frac{\partial \nu}{\partial x}, \quad \mu \frac{\partial \mu}{\partial y} = -\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial y} - \nu \frac{\partial \nu}{\partial y}, \quad \nu \frac{\partial \nu}{\partial z} = -\lambda \frac{\partial \lambda}{\partial z} - \mu \frac{\partial \mu}{\partial z}$$

und führt die abkürzenden Bezeichnungen

$$l = \mu \frac{\partial \lambda}{\partial z} - \nu \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \quad m = \nu \frac{\partial \mu}{\partial x} - \lambda \frac{\partial \mu}{\partial z}, \quad n = \lambda \frac{\partial \nu}{\partial y} - \mu \frac{\partial \nu}{\partial x}$$

ein, wo dann $l + m + n = 0$ als Bedingung für die Integrabilität der Gleichung $\lambda\, dx + \mu\, dy + \nu\, dz = 0$ schon erfüllt ist, so erhält man $(-\mu^2 m + \nu^2 n) A + \mu^2 l B - \nu^2 l C = 0$, und wenn man A mittelst der Gleichung $A + B + C = 0$ eliminiert, $(\mu^2 + \nu^2)(mC - nB) = 0$. Also ist $A : B : C = l : m : n$. Setzt man deshalb

$$A = \frac{\lambda\mu\nu}{T} l, \quad B = \frac{\lambda\mu\nu}{T} m, \quad C = \frac{\lambda\mu\nu}{T} n, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

so folgt

$$D = \frac{\lambda}{T}(\lambda^2 l - \mu^2 m - \nu^2 n), \quad E = \frac{\mu}{T}(-\lambda^2 l + \mu^2 m - \nu^2 n), \quad F = \frac{\nu}{T}(-\lambda^2 l - \mu^2 m + \nu^2 n). \quad (24)$$

Da ferner $\lambda = \beta\gamma' - \beta'\gamma$, $A = \alpha\alpha'$, $D = \beta\gamma' - \beta'\gamma$ ist, so hat man $\lambda A D = \alpha\alpha'(\beta^2\gamma'^2 - \beta'^2\gamma^2)$, etc.,

$$\lambda A D + \mu B E + \nu C F = \begin{vmatrix} \alpha\alpha' & \beta\beta' & \gamma\gamma' \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha'^2 & \beta'^2 & \gamma'^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' & \beta\beta' & \gamma\gamma' \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 & \beta^2 & \gamma^2 \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 & \beta'^2 & \gamma'^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \beta\beta' & \gamma\gamma' \\ 1 & \beta^2 & \gamma^2 \\ 1 & \beta'^2 & \gamma'^2 \end{vmatrix}$$

$$= -(\beta\gamma + \beta'\gamma')(\beta\gamma' - \beta'\gamma) = \lambda\mu\nu,$$

und, wenn man in dieser letzten Gleichung die vorigen Ausdrücke für $A, B, \ldots$ substituiert,

$$T^2 = \lambda^4 l^2 + \mu^4 m^2 + \nu^4 n^2 - 2\,\mu^2 m\,\nu^2 n - 2\,\nu^2 n\,\lambda^2 l - 2\,\lambda^2 l\,\mu^2 m \ldots \quad (25)$$

Durch die Gleichungen (23), (24) und (25) sind uns die Elemente des quadratischen operativen Polynoms $(d \,.\, d')$ vollständig bekannt, und die einzige Bedingung, von der oben die Rede war, ist nun, wenn $\frac{1}{R} = W$ gesetzt wird,

$$T \,.\, (d \,.\, d')\, W = \lambda\,\mu\,\nu \left(l\, \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + m\, \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + n\, \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right)$$

$$+ \lambda(\lambda^2 l - \mu^2 m - \nu^2 n) \frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial z} + \mu(-\lambda^2 l + \mu^2 m - \nu^2 n) \frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial z} + \nu(-\lambda^2 l - \mu^2 m + \nu^2 n) \frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial z} = 0. \quad (26)$$

Setzt man endlich hier $W = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{R}$, $\lambda = \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial x}$, etc. und multipliziert mit R^{12}, so wird die Gleichung in Beziehung auf alle partiellen Differentialkoeffizienten der gesuchten Funktion f ganz und rational.

Ich führe bloss noch an, dass die partielle Differentialgleichung dritter Ordnung für eine Funktion f, welche eine zu einem orthogonalen Systeme gehörende Flächenschar darstellt, auch unter folgende Form gebracht werden kann:

$$T^2 \Sigma \left(\lambda \frac{\partial \beta}{\partial x} - \beta \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) = \lambda\,\mu\,\nu\, \Sigma \lambda \left(m \frac{\partial n}{\partial x} - n \frac{\partial m}{\partial x} \right) + \Sigma \lambda\, l\, (\lambda^2 l - \mu^2 m - \nu^2 n) \left(\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) = 0.$$

Trägt man auf jeder Normale des Kontinuums $f =$ const. ein unendlich kleines Stück $\frac{\delta f}{R}$ auf, so liegen die Endpunkte aller dieser Stücke in dem successiven Kontinuum derselben Schar, für welches $f(x, y, \ldots) =$ const. $+ \delta f$ ist. Wenn man also eine Funktion W kennt, welche der Bedingung $(d \,.\, d')\, W = 0$ genügt, und trägt dann auf jeder Normale der Fläche $V = 0$ ein Stück $W\omega$ auf, wo ω einen sehr kleinen konstanten Faktor bedeutet, so liegen die Endpunkte in einer neuen Fläche, welche fähig ist, zugleich mit der vorigen einem orthogonalen System anzugehören. Diese Bemerkung führt uns zu einer graphischen Konstruktion eines beliebigen orthogonalen Flächensystems.

Da $\Sigma \lambda\, d'\alpha = 0$, $\Sigma \alpha\, d'\alpha = 0$ ist, so folgt $d'\alpha : d'\beta : d'\gamma = \alpha' : \beta' : \gamma'$ und hieraus $d'\alpha = \alpha' \,.\, \Sigma \alpha' d'\alpha$, etc. Daher ist das operative Polynom $\overline{d'd} = \Sigma d'\alpha \frac{\partial}{\partial x} = \Sigma \alpha' d'\alpha \times d'$, und es wird dadurch $(d \,.\, d')\, W = d'(d\, W) - \Sigma \alpha' d'\alpha \times d'\, W$. Wenn also die Funktion W der Bedingung $(d \,.\, d')\, W = 0$ genügt, so ist mit Rücksicht auf die Formel (21) überall auf der Fläche

$$d'(d\, W) = \frac{\varrho\, d \log \varrho'}{\varrho - \varrho'} \cdot d'\, W \ldots \quad (27)$$

Man wähle nun eine ganz beliebige Fläche, ziehe alle ihre Krümmungslinien, nehme von diesen zwei sich im Punkt A kreuzende l, l' heraus und verfüge nach Belieben über die Werte der Funktion W, welche diesen Krümmungslinien entlang stattfinden sollen. Entspricht die Krümmungslinie l der Richtung (α, β, γ), so kennen wir derselben entlang die Werte von dW. Auf der andern l' liege A_1 unendlich nahe bei A, und es gehe durch A_1 die auf l folgende Krümmungslinie l_1. Da W längs l' bekannt ist, so ist auch $d'W$ in A bekannt; der Faktor $\frac{\varrho\, d \log \varrho'}{\varrho - \varrho'}$ ist auf der ganzen Fläche bekannt; folglich ist $d'(dW)$ in A bekannt. Aber dW in A_1 ist gleich dW in A plus $AA_1 \times d'(dW)$ in A; also ist dW in A_1 bekannt; und da W in A_1 bekannt ist, so kennen wir, wenn $A_1 B_1$ ein Element der Krümmungslinie l_1 ist, auch W in B_1 ($= W$ in $A_1 + A_1 B_1 \times dW$ in A_1). Die zwei successiven Krümmungslinien l, l_1 mögen von den aufeinander folgenden Krümmungslinien $l', m', n', \ldots$ in die entsprechenden Elemente AB, A_1B_1; BC, B_1C_1; CD, C_1D_1; ... geteilt werden. Da W in B und in B_1 bekannt ist, so kennt man $d'W$ in B, also vermöge jener Relation (27) auch $d'(dW)$ in B. Aber dW in B ist bekannt; man kennt also auch dW in B_1, und, da W in B_1 bekannt ist, auch W in C_1. Folglich kennt man $d'W$ in C, u. s. f. Man lernt so W längs der ganzen Krümmungslinie l_1 kennen. Ist l_2 eine unmittelbar folgende Krümmungslinie, welche l' in A_2 schneidet, so wird man ebenso, vom Werte der W in A_2 willkürlich beigelegt ward ausgehend, die Werte der Funktion W längs der ganzen Krümmungslinie l_2 bestimmen können. Wird dieses Verfahren fortgesetzt, so ist klar, dass die Werte der Funktion W für alle Punkte der Fläche durch die, welche wir längs der Krümmungslinien l und l' willkührlich angenommen haben, bestimmt sind.

Ist jetzt ω eine unendlich kleine Grösse, und wird $W\omega$ in jedem Punkte der Fläche auf die Normale aufgetragen, so bilden die Endpunkte eine neue Fläche. Da die Bedingung $(d \,.\, d')W = 0$ erfüllt ist, so werden die Endpunkte der auf den Normalen der ersten Fläche aufgetragenen Stücke, längs einer Krümmungslinie derselben verfolgt, immer eine Krümmungslinie der zweiten Fläche bilden.

Die zweite Fläche kann man wieder wie die erste behandeln und unter anderm die beiden Krümmungslinien, längs denen über die Funktion W von neuem frei verfügt wird, den mit l und l' bezeichneten der ersten Fläche entsprechen lassen. Nun ist

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(Df) = D\frac{\partial f}{\partial x} + \Sigma \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = D\frac{\partial f}{\partial x} = R\,D\lambda + \lambda\,D\,R,$$

und zugleich

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \lambda\,D\,R + \alpha\,d\,R + \alpha' d' R;$$

folglich

$$D\lambda = \alpha\,d \log R + \alpha' d' \log R, \text{ etc.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$



Man kennt also $D\lambda$, $D\mu$, $D\nu$ für jeden Punkt der ersten Fläche $\left(\text{indem } W = \frac{1}{R}\right)$, also auch λ, μ, ν für jeden Punkt der zweiten. Wir sehen so durch die Bedingungen (28) die entsprechenden Krümmungslinien der ersten, zweiten, dritten, etc. Fläche sich an einander reihen, und dadurch die zwei andern Flächenscharen entstehen, welche mit jener ersten Schar ein orthogonales System bilden.

Ich behaupte nun, dass, wenn drei im übrigen beliebige Flächen gegeben sind, welche sich in drei je zweien gemeinschaftliche Krümmungslinien orthogonal schneiden, diese Flächen, ohne einer ferneren Bedingung zu genügen, immer einem orthogonalen System angehören und dasselbe vollständig bestimmen.

Vom Punkte A aus, in welchem die drei gegebenen Flächen sich schneiden, gehen auf der ersten die Krümmungslinien l, l' und die der zweiten und dritten Fläche gemeinschaftliche Krümmungslinie. Auf dieser schneide man von A an ein unendlich kleines Stück s ab und ziehe durch dessen Endpunkt die zu l, l' successiven Krümmungslinien der zwei letzten Flächen; man kennt dann beiden l und l' entlang die Abstände $s = \frac{w}{R}$ der genannten successiven Krümmungslinien, wobei der Wert von $\frac{1}{R} = W$ in A beliebig angenommen und so die unendlich kleine Konstante w bestimmt werden kann. Da somit die Funktion W längs zweien sich kreuzenden Krümmungslinien der ersten Fläche bekannt ist, so ist sie auch nach dem, was wir vorhin gesehen haben, auf der ganzen ersten Fläche bekannt. Man kennt daher auch die unmittelbar auf diese folgende Fläche der ersten Schar. Für das Gelingen der Fortsetzung dieser Konstruktion braucht bloss noch nachgewiesen zu werden, dass die Bedingungen (28) durch die zweite und dritte der ursprünglichen Flächen schon erfüllt ist.

Führt man statt des dortigen R das unendlich kleine normale Element $s = \frac{\omega}{R}$ ein, so werden jene Bedingungen:

$$D\lambda = -\alpha\, d \log s - \alpha' d' \log s, \text{ etc.; also } -d \log s = \alpha\, D\lambda + \beta\, D\mu + \gamma\, D\nu,$$

oder

$$d \log s = \lambda\, D\alpha + \mu\, D\beta + \nu\, D\gamma. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28 \text{ bis})$$

Es handelt sich also darum, die Variation des unendlich kleinen Abstandes zweier successiver Krümmungslinien l, l_1 einer Fläche auszudrücken, welche längs l stattfindet. Dieser Abstand, als Element der kreuzenden Krümmungslinie l' sei σ', das Element von l hingegen sei σ. Vom Durchschnittspunkt A der Linien l, l' aus schneide man auf diesen die unendlich kleinen Stücke $\sigma = AB$, $\sigma' = AA_1$ ab; die durch A_1 und B gehenden Krümmungslinien l_1 und m' bilden dann mit l, l' das Viereck ABB_1A_1, und es ist $BB_1 - AA_1 = AB \cdot d\sigma' = \sigma\, d\sigma'$. Von der Variation der Richtung von BB_1 im Vergleich mit AA_1 darf man absehen, weil sie wegen der orthogonalen Stellung dieser

Viereckseiten zu der Basis AB in der Länge dieser Linienelemente nur eine Variation zweiter Ordnung hervorbringt; deshalb darf man in obiger Differenz das Element BB_1 durch seine Projektion auf AA_1 oder auf die Richtung $(\alpha', \beta', \gamma')$ ersetzen. Man kann also auch die Differenzen der Projektionen von BB_1 und AA_1 auf die Axen der x, y, z, oder die ihnen resp. gleichen Differenzen der Projektionen von A_1B_1 und AB mit α', β', γ' multiplizieren und addieren; die Summe wird $\sigma d\sigma'$ sein. Da man aber nach der vorigen Bemerkung von der Richtungsveränderung von BB_1 absehen darf, so braucht man bei A_1B_1 nur die Richtungsveränderung (weil bewirkt durch eine Längenvariation von BB_1) zu berücksichtigen und kann hingegen die Längenvariation (weil sie keine solche für BB_1 bedingt) vernachlässigen. Die Variationen der Richtungskosinus von AB sind $\sigma' d'\alpha$, $\sigma' d'\beta$, $\sigma' d'\gamma$; als Länge kann man diejenige von AB oder σ behalten. Demnach dürfen statt der Differenzen der Projektionen von A_1B_1 und AB auf die Koordinatenaxen die Grössen $\sigma\sigma' d'\alpha$, $\sigma\sigma' d'\beta$, $\sigma\sigma' d'\gamma$ gesetzt werden. Multipliziert man nun mit α', β', γ', addiert und lässt den Faktor σ weg, so erhält man

$$d\sigma' = \sigma' (\alpha' d'\alpha + \beta' d'\beta + \gamma' d'\gamma).$$

Vertauscht man hier $\alpha', \beta', \gamma', \sigma', d'$ mit λ, μ, ν, s, D, so erhält man gerade die zu beweisende Gleichung (28 bis).

Da die partielle Differentialgleichung (26) in Beziehung auf die Funktion f von der dritten Ordnung ist, so muss ihre vollständige Lösung drei arbiträre Funktionen enthalten. Diese Forderung ist durch die vorige graphische Konstruktion insofern erfüllt, als die drei ursprünglichen Flächen mit Ausnahme der Bedingung, sich in Krümmungslinien und orthogonal zu schneiden, ganz willkührlich sind.

§ 45. *Anwendung der konfokalen Kontinua auf die Bestimmung des Masses der durch ein Kontinuum zweiten Grades (mit lauter reellen Axen) begrenzten Totalität und des begrenzenden Kontinuums selbst. Relationen zwischen vollständigen Abelschen Integralen.*

Wir wollen das Element der n-fachen Totalität mittelst der Variationen der Axenquadrate eines Systems konfokaler Kontinua zu bestimmen suchen. Es seien $A, B, C, \ldots J$ die n Axenquadrate irgend eines Kontinuums des Systems, und wenn n Kontinua die Lösung $(x, y, \ldots)$ gemein haben, so mögen die Axenquadrate eines jeden mit demselben untern Zeiger versehen werden, sodass die Zeiger $1, 2, \ldots n$ der Reihe nach allen durchgehenden Kontinuen entsprechen. Ist jetzt ds_1 das lineare Element, welches der Variation dA_1 entspricht, während $A_2, A_3, \ldots A_n$ sich nicht ändern, sind

ferner $\alpha_1 = \frac{p_1 x}{A_1}$, $\beta_1 = \frac{p_1 y}{B_1}, \cdots$ die Richtungskosinus der Normale des Kontinuums A_1, so hat man $dx = \alpha_1 ds_1$, $dy = \beta_1 ds_1, \ldots$, und durch Differentiation der Gleichung

$$\frac{x^2}{A_1} + \frac{y^2}{B_1} + \cdots = 1$$

ergiebt sich

$$2\left(\frac{x\alpha_1}{A_1} + \frac{y\beta_1}{B_1} + \cdots\right) ds_1 - \left(\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{B_1^2} + \cdots\right) dA_1 = 0,$$

woraus

$$ds_1 = \frac{dA_1}{2p_1}$$

folgt, wobei man sich an den Ausdruck

$$p_1^2 = \frac{A_1 B_1 C_1 \ldots J_1}{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)\ldots(A_1 - A_n)}$$

zu erinnern hat. Bedeutet nun dV das Element der Totalität, so kann man dieses als orthogonales Paralleloschem auffassen, dessen Seiten $ds_1, ds_2 \ldots ds_n$ sind. Es ist also

$$dV = \frac{1}{2^n} \frac{dA_1 \, dA_2 \ldots dA_n}{p_1 p_2 \ldots p_n}.$$

Die Integration dieser Formel kann auf unter sich unabhängige Quadraturen zurückgeführt werden, da die Variabeln $A_1, A_2, \ldots A_n$ sich trennen lassen. Wir müssen aber vorher einige Abkürzungen einführen.

Wenn $A > B > C > \cdots > H > J$ angenommen wird, so sei auch $A_1 > A_2 > \cdots > A_n$. Dann ist $J_1 > 0$, $H_2 > 0 > J_2$, $G_3 > 0 > H_3$, u. s. f. Die Quadratwurzeln $R_1 = \sqrt{A_1 B_1 C_1 \ldots J_1}$, $R_2 = \sqrt{-A_2 B_2 \ldots J_2}, \ldots$, $R_i = \sqrt{(-1)^{i-1} A_i B_i \ldots J_i}, \ldots$, $R_n = \sqrt{(-1)^{n-1} A_n B_n \ldots J_n}$ sind also alle reell, und wir wollen sie überdies noch als positiv annehmen; jede derselben enthält nur eine Variable. Wenn wir ferner die alternierende Funktion

$$\begin{aligned}(A_1 - A_2)\ (A_1 - A_3)\ (A_1 - A_4) \ldots (A_1 - A_{n-1})\ (A_1 - A_n) \\ \times (A_2 - A_3)\ (A_2 - A_4) \ldots (A_2 - A_{n-1})\ (A_2 - A_n) \\ \times (A_3 - A_4) \ldots (A_3 - A_{n-1})\ (A_3 - A_n) \\ \times \text{ etc.} \\ \times (A_{n-2} - A_{n-1})\ (A_{n-2} - A_n) \\ \times (A_{n-1} - A_n)\end{aligned}$$

mit Ω bezeichnen, so ist

$$\Omega = \Sigma \pm A_1^{\varepsilon_1} A_2^{\varepsilon_2} \ldots A_n^{\varepsilon_n},$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ irgend eine Permutation der Exponenten $n-1, n-2, n-3, \ldots 2, 1, 0$ sein, und das obere oder untere Vorzeichen des Produkts gelten soll, je nachdem die Permutation eine positive oder negative ist. (Der Beweis steht in Jacobis Abhandlung De functionibus alternantibus im Crelleschen Journal.) Wird Ω durch

$$(A_1 - A_i)(A_2 - A_i) \ldots (A_{i-1} - A_i)(A_i - A_{i+1}) \ldots (A_i - A_n)$$

dividiert, so soll Φ_i der Quotient sein; man kann also auch sagen, $(-1)^{i-1}\Phi_i$ sei das Aggregat aller in der Entwicklung von Ω vorkommenden und durch A_i^{n-1} teilbaren Glieder, wenn sie von diesem Faktor befreit sind. Es ist klar, dass Φ_i wiederum eine alternierende Funktion ist. Es versteht sich übrigens, dass die Ausdrücke für Ω und Φ_i sich nicht ändern, wenn auch sämtliche Axenquadrate A um eine und dieselbe Konstante vermindert werden. Wir erhalten nun zunächst

$$dV = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Omega \frac{dA_1}{R_1} \frac{dA_2}{R_2} \cdots \frac{dA_n}{R_n},$$

also für das Mass einer von n Paaren zu derselben Gattung gehörender konfokaler Kontinua begrenzten Totalität den Ausdruck

$$V = \left(\frac{1}{2}\right)^n \Sigma \pm \int \frac{A_1^{\varepsilon_1} dA_1}{R_1} \cdot \int \frac{A_2^{\varepsilon_2} dA_2}{R_2} \cdots \int \frac{A_n^{\varepsilon_n} dA_n}{R_n}.$$

Wird das erste Integral zwischen den Grenzen $J_1 = 0$ und $J_1 = J$, das zweite zwischen $H_2 = 0$ und $J_2 = 0$, etc., das letzte zwischen $A_n = 0$ und $B_n = 0$ genommen, so erhält man das Mass V der von einem Kontinuum (A) erster Gattung begrenzten Totalität, dividiert durch 2^n. Das ganze Mass ist aber offenbar R mal so gross als dasjenige einer Polysphäre vom Radius 1; folglich ist in diesem speziellen Fall

$$V = \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} R$$

der finite Wert eines Aggregats von Produkten von je n Abelschen Integralen, welche immer alle bis auf eines vollständig sind. Man kann aber überhaupt die Zahl der Faktoren solcher Produkte um 1 vermindern, wie wir jetzt zeigen wollen.

Da $\sum_{i=1}^{i=n} A_i^m (-1)^{i-1} \Phi_i = 0$ oder $= \Omega$ ist, je nachdem $0 < m < n-1$ oder $m = n-1$ ist, so ist überhaupt

$$\sum_{i=1}^{i=n} f(A_i) \cdot (-1)^{i-1} \Phi_i = \Omega,$$

wenn f eine ganze Funktion $(n-1)$-ten Grades bezeichnet, wo 1 der Koeffizient der höchsten Potenz ist. Nun ist

$$R_i \frac{\partial R_i}{\partial A_i} = \frac{1}{2}(-1)^{i-1}\left\{B_i C_i \ldots J_i + A_i C_i \ldots J_i + \cdots + A_i B_i C_i \ldots H_i\right\}$$

eine ganze Funktion $(n-1)$-ten Grades von A_i, worin die höchste Potenz den Koeffizienten $(-1)^{i-1}\frac{n}{2}$ hat; folglich ist

$$\Sigma R_i \frac{\partial R_i}{\partial A_i} \Phi_i = \frac{n}{2}\Omega.$$

Man erhält demnach

$$dV = \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}}\left\{dR_1 \cdot \Phi_1 \frac{dA_2}{R_2}\frac{dA_3}{R_3}\cdots\frac{dA_n}{R_n} + dR_2 \cdot \Phi_2 \frac{dA_1}{R_1}\frac{dA_3}{R_3}\cdots\frac{dA_n}{R_n} + \cdots + dR_n \cdot \Phi_n \frac{dA_1}{R_1}\frac{dA_2}{R_2}\cdots\frac{dA_{n-1}}{R_{n-1}}\right\},$$

wo z. B. $\frac{\partial R_1}{\partial A_1} dA_1$ durch dR_1 ersetzt ward, weil R_1 nur die Variable A_1 und Φ_1 diese nicht enthält. Integriert man, so ist

$$V = \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}}\left\{(R_1)\int^{n-1} \Phi_1 \frac{dA_2}{R_2}\frac{dA_3}{R_3}\cdots\frac{dA_n}{R_n} + \text{etc.}\right\},$$

wo die Klammern, in die man z. B. R_1 gesetzt hat, bedeuten, dass diese Funktion zwischen den auf A_1 bezüglichen Integrationsgrenzen zu nehmen sei. Da Φ_i eine alternierende Funktion ist, so zerfällt das $(n-1)$-fache Integral in ein Aggregat von Produkten von je $n-1$ Abelschen Integralen.

Nimmt man die auf $A_2, A_3, \ldots A_n$ bezüglichen Integrationsgrenzen und die untere für A_1 so weit, als es die Bedingung der Realität der Funktionen $R_1, R_2, \ldots R_n$ nur erlaubt, so wird

$$(R_2) = (R_3) = \cdots = (R_n) = 0, \quad (R_1) = R;$$

und man erhält

$$\int^{n-1} \Phi_1 \frac{dA_2}{R_2}\frac{dA_3}{R_3}\cdots\frac{dA_n}{R_n} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

eine Relation zwischen $(n-1)^2$ vollständigen Abelschen Integralen, deren jedes in der Formel $\int (A-k)^m \frac{dA}{R}$, $[m = 0, 1, 2, \ldots n-2]$ enthalten ist.

Indem wir uns das Kontinuum erster Gattung als fest denken, lassen wir in den Zeichen seiner Axenquadrate den Zeiger 1 weg und setzen uns vor, das Mass S eines

von $n-1$ Paaren konfokaler Kontinua begrenzten Stücks des Kontinuums A erster Gattung zu bestimmen. Man hat

$$d\,S = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{dA_2}{p_2}\frac{dA_3}{p_3}\cdots\frac{dA_n}{p_n} = \Phi\sqrt{(A-A_2)(A-A_3)\dots(A-A_n)}\,\frac{dA_2}{R_2}\frac{dA_3}{R_3}\cdots\frac{dA_n}{R_n}. \quad (2)$$

Setzt man $A_2 - k = K_2$, $A_3 - k = K_3, \dots$, wo k eine beliebige Konstante bedeutet, so ist

$$\Phi = (K_2-K_3)(K_2-K_4)\dots(K_2-K_n)\times(K_3-K_4)\dots(K_4-K_n)\times\cdots\times(K_{n-1}-K_n)$$

$$= \begin{vmatrix} K_2^{n-2} & K_3^{n-2} & K_4^{n-2} & \dots & K_n^{n-2} \\ K_2^{n-3} & K_3^{n-3} & K_4^{n-3} & \dots & K_n^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_2^2 & K_3^2 & K_4^2 & \dots & K_n^2 \\ K_2 & K_3 & K_4 & \dots & K_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \Sigma \pm K_2^{\varepsilon_2} K_3^{\varepsilon_3} \dots K_n^{\varepsilon_n},$$

wo $(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots \varepsilon_n)$ eine Permutation der Exponenten $n-2$, $n-1, \dots 2, 1, 0$ bezeichnet. Man hat also

$$S = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Sigma \pm \int \frac{K_2^{\varepsilon_2}\sqrt{A-A_2}}{R_2}\,d\,A_2 \times \int \frac{K_3^{\varepsilon_3}\sqrt{A-A_3}}{R_3}\,d\,A_3 \times \cdots \times \int \frac{K_n^{\varepsilon_n}\sqrt{A-A_n}}{R_n}\,d\,A_n,$$

ein Aggregat von Produkten von je $n-1$ Abelschen Integralen. Nimmt man jedes Integral vollständig und multipliziert die rechte Seite mit 2^n, so erhält man das Mass des ganzen Kontinuums (A).

Setzt man $n = 3$, $\frac{B-C}{A-C} = k^2$, $\frac{A-B}{A-C} = k'^2$, so dass $k^2 + k'^2 = 1$, ferner

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,x}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}, \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,d\,x,$$

so verwandelt sich die Gleichung (1) in

$$F(k)\,E(k') + E(k)\,F(k') - F(k)\,F(k') = \frac{\pi}{2},$$

die bekannte von Legendre gefundene Relation zwischen vollständigen elliptischen Integralen der ersten und zweiten Art mit komplementären Moduln. Die Gleichung (2) giebt für $n = 3$ die Oberfläche des Ellipsoids.

Was in diesem und dem folgenden Paragraphen vorkommt, ist eine Ausführung von sehr interessanten Andeutungen, welche Jacobi in jener Abhandlung (Crelle's Journal B. XIX) gegeben hat, wo er zuerst die Gleichung und Rektifikation der geodätischen Linie auf dem Ellipsoid durch einfache Integrale darstellte. Ich habe diese Gegenstände hier aufgenommen, weil sie in einer Theorie der vielfachen Kontinuität nicht fehlen dürfen.

§ 46. Bestimmung des kürzesten Weges sowohl in der Totalität als auch auf einem quadratischen Kontinuum oder dem Durchschnitte mehrerer konfokaler Kontinua.

Wenn die Werte $x, y, \ldots$ einer Lösung als Funktionen der ersten Axenquadrate $A_1, A_2, \ldots A_n$ der n durchgehenden konfokalen Kontinuen gedacht werden, so sind

$$\frac{dA_1}{2p_1}, \frac{dA_2}{2p_2}, \ldots, \frac{dA_n}{2p_n}$$

die Projektionen des Wegelements $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + \cdots}$ auf die Normalen der konfokalen Kontinuen. Da diese ein System von orthogonalen Richtungen bilden, so ist

$$ds^2 = \left(\frac{dA_1}{2p_1}\right)^2 + \left(\frac{dA_2}{2p_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dA_n}{2p_n}\right)^2;$$

oder auch, wenn $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ die Kosinus der Winkel bedeuten, welche das Wegelement ds mit den Normalen bildet,

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots \lambda_n^2 = 1, \quad ds = \lambda_1 \frac{dA_1}{2p_1} + \lambda_2 \frac{dA_2}{2p^2} + \cdots + \lambda_n \frac{dA_n}{2p_n}.$$

Wenn aber $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ überhaupt Grössen bezeichnen, welche der Bedingung $\Sigma \lambda^2 = 1$ genügen, so ist

$$ds^2 = \left(\Sigma \lambda \frac{dA}{2p}\right)^2 + \Sigma \lambda_1^2 \lambda_2^2 \left(\frac{dA_1}{\lambda_1 . 2p_1} - \frac{dA_2}{\lambda_2 . 2p_2}\right)^2 . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Gelingt es nun für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ solche Funktionen der Variabeln $A_1, A_2, \ldots A_n$ anzugeben, dass $\frac{\lambda_1}{p_1}$ nur A_1, $\frac{\lambda^2}{p_2}$ nur A_2, u. s. f. enthält, und setzt man dann

$$S = \int \frac{\lambda_1 dA_1}{2p_1} + \int \frac{\lambda_2 dA_2}{2p_2} + \cdots + \int \frac{\lambda_n dA_n}{2p_n}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

so hängt, da hier die Variabeln getrennt sind, der Wert von S nur von beiden Grenzlösungen ab, aber nicht von dem Wege, der sie verbindet. Es wird daher vermöge (1) im allgemeinen für irgend einen aus reellen Elementen zusammengesetzten Weg immer sein $\int ds > S$, und nur dann $\int ds = S$, wenn

$$\frac{dA_1}{2p_1} : \frac{dA_2}{2p_2} : \cdots : \frac{dA_n}{2p_n} = \lambda_1 : \lambda_2 : \cdots : \lambda_n \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

ist. Also ist dann der Weg, der diese Proportionen zu seinen Differentialgleichungen hat, der kürzeste zwischen den zwei gegebenen Grenzlösungen.

Der kürzeste Weg muss ein Strahl sein. Ein solcher wird von $n-1$ konfokalen Kontinuen des gegebenen Systems berührt; ihre ersten Axenquadrate seien $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \ldots \mathfrak{A}_n$. Dann gelten, wie wir bereits aus § 41, V, Gl. (6) wissen, $n-1$ Gleichungen von der Form

$$\frac{\lambda_1^2}{A_1 - \mathfrak{A}} + \frac{\lambda_2^2}{A_2 - \mathfrak{A}} + \cdots + \frac{\lambda_n^2}{A_n - \mathfrak{A}} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

wo zu $\mathfrak{A}$ nach und nach die Zeiger $2, 3, \ldots n$ zu setzen sind. Die Realität des Strahls erfordert übrigens

$$A_1 > \mathfrak{A}_2 > A_2 > \mathfrak{A}_3 > \cdots > A_{n-1} > \mathfrak{A}_n > A_n.$$

Vermöge der Proportionen (3) sind die Gleichungen (4) als System von Differentialgleichungen erster Ordnung, hervorgegangen aus einmaliger Integration der $n-1$ Gleichungen zweiter Ordnung, welche die gewöhnliche Variationsrechnung liefert, aufzufassen; und da sie $n-1$ arbiträre Konstanten enthalten, so ist diese Integration die allgemeine.

Um nun untersuchen zu können, ob wirklich $\frac{\lambda_1}{p_1}, \frac{\lambda_2}{p_2}, \cdots$ Funktionen von je einer Variabeln sind, müssen wir zuerst $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ in Funktion der konfokalen Variabeln angeben. Wenn wir das System aller n Gleichungen, durch welche die Grössen λ bestimmt sind, so schreiben

$$\left.\begin{aligned} \frac{\lambda_1^2}{1+\omega A_1} + \frac{\lambda_2^2}{1+\omega A_2} + \cdots + \frac{\lambda_n^2}{1+\omega A_n} &= 1, \\ \frac{\lambda_1^2}{\omega(A_1-\mathfrak{A})} + \frac{\lambda_2^2}{\omega(A_2-\mathfrak{A})} + \cdots + \frac{\lambda_n^2}{\omega(A_n-\mathfrak{A})} &= 1, \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

wo zu $\mathfrak{A}$ die Zeiger $2, 3, \ldots n$ hingehören, und ω einen verschwindenden Faktor bedeutet, so können wir auf das System (5) die aus § 41, II bekannten Relationen zwischen orthogonalen und konfokalen Variabeln anwenden, und bekommen:

$$\lambda_i^2 = \frac{(1+\omega A_i)(A_i - \mathfrak{A}_2)(A_i - \mathfrak{A}_3)\ldots(A_i - \mathfrak{A}_n)}{(A_i - A_1)(A_i - A_2)\ldots(A_i - A_{i-1})(A_i - A_{i+1})\ldots(A_i - A_n)}, \quad [i = 1, 2, \ldots n]$$

wo noch $\omega = 0$ zu setzen ist. Da der Ausdruck für p_i^2 denselben Nenner und $A_i B_i C_i \dots J_i$ zum Zähler hat, so sieht man sogleich, dass der Ausdruck für $\frac{\lambda_i}{p_i}$ nur die Variable A_i enthält. Wenn wir fortan der Kürze wegen $q_i = \frac{p_i}{\lambda_i}$ setzen, so ist

$$q_i^2 = \frac{A_i B_i C_i \dots J_i}{(A_i - \mathfrak{A}_2)(A_i - \mathfrak{A}_3) \dots (A_i - \mathfrak{A}_n)}.$$

(Da unter den Faktoren des Zählers die $i-1$ letzten, und unter denen des Nenners die $i-1$ ersten negativ sind, so ist q_i^2 positiv.) Die Form dieses Ausdrucks giebt q_i als Abstand des Centrums vom linearen Tangentialkontinuum des quadratischen Kontinuums (A_i), welches durch seinen (imaginären oder reellen) Durchschnitt mit den $n-1$ festen konfokalen Kontinuen $(\mathfrak{A})$ gelegt ist, zu erkennen. Da nicht einmal alle Kontinuen $(\mathfrak{A})$ zu $n-1$ verschiedenen Gattungen zu gehören brauchen, so kann sehr wohl das einfache Kontinuum, in dem sie sich schneiden, imaginär sein; und wenn auch alle $(\mathfrak{A})$ $n-1$ verschiedene Gattungen repräsentieren, so muss erst noch das variable Kontinuum (A_i) der letzten noch übrigen Gattung (es kann nur $i=1$ oder $i=n$ sein) angehören, wenn das Perpendikel q_i einer reellen Lösung entsprechen soll. In diesem einzigen Falle stellt das Integral $\int \frac{d A_i}{2 q_i}$ die Länge eines reell begrenzten Stücks der den $n-1$ festen Kontinuen $(\mathfrak{A})$ gemeinsamen Krümmungslinie dar. Nichtsdestoweniger hat das Integral $\int \frac{d A}{2 q}$ in allen Fällen, die hier in Betracht kommen werden, einen reellen Wert und kann analytisch immerhin als zwischen zweien Kontinuen (A) derselben Gattung befindliches Stück der reellen oder imaginären Krümmungslinie $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \dots \mathfrak{A}_n)$ gefasst werden. Wenn uns erlaubt wird, von zweien Wegen, welche durch dasselbe Paar konfokaler Kontinuen gleicher Gattung begrenzt werden, den einen Projektion des andern zu nennen, und wenn alle auf die einzelnen Variabeln $A_1, A_2, \dots A_n$ bezüglichen Paare von Integrationsgrenzen von den zwei Grenzlösungen des Weges $\int d s$ hergenommen sind, so ist der kürzeste Weg

$$S = \int \frac{dA_1}{2 q_1} + \int \frac{dA_2}{2 q_2} + \dots + \int \frac{dA_n}{2 q_n} \quad \dots \dots \dots \quad (6)$$

gleich der Summe seiner Projektionen auf die feste Krümmungslinie $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \dots \mathfrak{A}_n)$, welche von allen n durch die Grenzlösungen gelegten Paaren konfokaler Kontinuen je einer und derselben Gattung gebildet werden.

Da $p = q\lambda$, so geben die Proportionen (3) für den kürzesten Weg die Bedingungen $\frac{d A}{2 q} = \lambda^2 d s$, wo A, q, λ mit den untern Zeigern $1, 2, \dots n$ zu versehen sind. Die Gleichungen (4) werden demnach

$$\frac{\left(\frac{d A_1}{2 q_1}\right)}{A_1 - \mathfrak{A}} + \frac{\left(\frac{d A_2}{2 q_2}\right)}{A_2 - \mathfrak{A}} + \dots + \frac{\left(\frac{d A_n}{2 q_n}\right)}{A_n - \mathfrak{A}} = 0, \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

wo $\mathfrak{A}$ nach und nach mit den untern Zeigern 2, 3, ... n zu versehen ist. In diesen $n-1$ Differentialgleichungen erster Ordnung sind die Variabeln getrennt; sie können also mittelst blosser Quadraturen integriert werden. Dadurch werden $n-1$ Integrationskonstanten hereingebracht, sodass nunmehr die $n-1$ finiten Gleichungen des kürzesten Wegs $2(n-1)$ verfügbare Konstanten enthalten, was gerade nötig ist und hinreicht, um die zwei Gruppen von je $n-1$ Bedingungen, damit der Weg durch die zwei gegebenen Grenzlösungen gehe, zu befriedigen.

Wird der Anfangswert einer Variabeln z. B. A_1 beliebig gesetzt, so ist dadurch der Weg noch nicht im geringsten näher bestimmt; denn dieser Weg muss im Verlaufe jedes Weges, dessen $\mathfrak{A}_2$ kleiner ist, zweimal vorkommen. Wenn daher die Anfangswerte der n Variabeln $A_1, A_2, \ldots A_n$ so angenommen werden, wie es die gegebene Anfangslösung verlangt, so zählt dieses nur für $n-1$ Bestimmungsstücke des Wegs. Wenn nun alle Integrale mit diesen Anfangswerten beginnen, so sind durch die $n-1$ Wegesgleichungen

$$\int \frac{1}{A_1-\mathfrak{A}}\,\frac{dA_1}{2\,q_1} + \int \frac{1}{A_2-\mathfrak{A}}\,\frac{dA_2}{2\,q_2} + \cdots + \int \frac{1}{A_n-\mathfrak{A}}\,\frac{dA_n}{2\,q_n} = 0 \quad \ldots \quad (8)$$

fortan immer $n-1$ der Variabeln $A_1, A_2, \ldots A_n$ in Funktion einer einzigen unter ihnen und der $n-1$ Konstanten $\mathfrak{A}$ gegeben, und diese letzten sind durch die Bedingung, dass der Weg durch die Endlösung gehen soll, gerade bestimmt.

Es ist noch zu bemerken, dass wegen $\frac{dA}{2q} = \lambda^2 ds$ für ein positives Wegelement immer auch seine Projektion $\frac{dA}{2q}$ positiv zu nehmen ist. Das Vorzeichen der Quadratwurzel q muss also immer mit dem des Differentials dA übereinstimmen. Wenn also ein q durch Null oder Unendlich hindurchgeht und infolgedessen einen Zwischenwechsel erfährt, so muss auch das entsprechende dA diesen Zwischenwechsel mitmachen. Hiermit ist nun auch der Verlauf der einzelnen Integrale in (8) hinreichend bestimmt; beim Fortschreiten des Weges nämlich ist im Ausdruck ihrer Elemente immer $\frac{dA}{2q}$ positiv zu nehmen. Ein Durchgang des Faktors von dA durch Unendlich stört die endliche Beschaffenheit des Integrales nicht. Denn entweder rührt derselbe her vom Durchgang einer der Grössen $A, B, \ldots J$ durch Null; geht z. B. J durch Null, so sind ausser $\frac{dA}{2\sqrt{J}} = d\,.\,\sqrt{J}$ alle übrigen Faktoren oder Divisoren endlich, und die Form $d\,.\,\sqrt{J}$ zeigt einen mit Zeichenwechsel des Inkrements, endlicher Faktor $\times \sqrt{J}$, begleiteten ununterbrochenen Fortgang (z. B. Wachstum, wenn $A-\mathfrak{A}$ positiv ist) des Integrales an. Oder jener Durchgang rührt vom Verschwinden des rationalen Nenners $A-\mathfrak{A}$ her; dann findet sich aber auch $\sqrt{A-\mathfrak{A}}$ im Nenner von q, und da alles übrige endlich bleibt, hat man nur $\frac{dA}{2\sqrt{A-\mathfrak{A}}} = d\sqrt{A-\mathfrak{A}}$ zu beachten, was ebenso wie vorhin einen ununterbrochenen Fortgang des Integrals anzeigt. Im letzten Falle ward vor dem betrachteten

Durchgang $A > \mathfrak{A}$ vorausgesetzt, und es ist aus dem Gesagten klar, dass auch nach dem Durchgang wieder $A > \mathfrak{A}$ sein wird. Ganz ähnlich verhält sich die Sache, wenn anfangs $A < \mathfrak{A}$ ist; man hat nur $d\sqrt{\mathfrak{A} - A}$ zu beachten. Aus diesen Bemerkungen folgt, 1. dass jede Variable A die ihr, sei es durch ihre Gattung selbst oder durch Konstanten $\mathfrak{A}$ derselben Gattung, gesetzten Grenzen niemals überschreitet, sondern zwischen denselben oscilliert, 2. dass bei keinem der in den Gleichungen (8) vorkommenden Integrale je ein Uebergang vom Wachstum zur Abnahme oder umgekehrt eintritt, sondern jedes fortwährend wächst oder abnimmt, je nachdem die entsprechende Differenz $A - \mathfrak{A}$ von Anfang an positiv oder negativ war.

Da man $n - 1$ algebraische Gleichungen zwischen den Variabeln $A_1, A_2, \ldots A_n$ angeben kann, welche denselben Weg darstellen, wie die aus transcendenten Funktionen zusammengesetzten Gleichungen (8), so sind jene mit diesen äquivalent. Werden die Abelschen Integrale, welche im System (8) vorkommen, wie Argumente, und die ursprünglichen Variabeln $A_1, A_2, \ldots A_n$ als Funktionen derselben aufgefasst, so kennen wir also $n - 1$ algebraische Relationen zwischen diesen Funktionen. Die Gleichung (6) endlich lehrt uns die Summe von n andern Abelschen Integralen, welche mit den vorigen in engem Zusammenhang stehen, in algebraischer Form kennen. Für $n = 2$ enthält die alsdann einzige Gleichung (8) das Additionstheorem für elliptische Integrale der ersten Art, die Gleichung (6) für solche der zweiten Art.

Wenn einige der konfokalen Kontinuen ($\mathfrak{A}$) verschwindende Axenquadrate haben, so sind sie als lineare durch die $n - 1$ übrigen Axen der Lage nach bestimmte Kontinua aufzufassen, begränzt von einem in denselben befindlichen $(n - 2)$-fachen quadratischen Kontinuum ($(n - 2)$-faches Fokalkontinuum), dem die übrigen Axenquadrate auch dem Werte nach zukommen. Der Strahl oder kürzeste Weg muss alsdann das $(n-2)$-fache Fokalkontinuum in einer Lösung treffen. Der Ausdruck für q vereinfacht sich desto mehr, je mehr Kontinua $\mathfrak{A}$ diese Eigenschaft haben. Ist z. B.

$$J_2 = 0,\ \mathfrak{H}_3 = 0,\ B_4 = 0, \ldots, E_{n-1} = 0,\ B_n = 0,$$

so wird $q = \sqrt{A}$, die den Kontinuen ($\mathfrak{A}$) gemeinschaftliche Krümmungslinie ist die Axe der x, und die Gleichungen (6) und (8) erhalten die Formen:

$$\begin{aligned}
S &= \int d\sqrt{A_1} + \int d\sqrt{A_2} + \cdots + \int d\sqrt{A_n}\,, \\
&\int \frac{d\sqrt{A_1}}{B_1} + \int \frac{d\sqrt{A_2}}{B_2} + \cdots + \int \frac{d\sqrt{A_n}}{B_n} = 0, \\
&\int \frac{d\sqrt{A_1}}{C_1} + \int \frac{d\sqrt{A_2}}{C_2} + \cdots + \int \frac{d\sqrt{A_n}}{C_n} = 0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\int \frac{d\sqrt{A_1}}{J_1} + \int \frac{d\sqrt{A_2}}{J_2} + \cdots + \int \frac{d\sqrt{A_n}}{J_n} = 0.
\end{aligned}$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt uns die Länge eines Stücks des Strahls gleich der Summe seiner reellen Projektionen auf die Axe der x, welche von je einem Paare durch die Enden jenes Stückes gelegten konfokalen Kontinuen derselben Gattung abgeschnitten werden; es ist aber wohl zu merken, dass die Elemente dieser Projektionen immer mit dem Elemente des Strahles selbst zugleich positiv zu nehmen sind, wenn sie auch auf der Axe der x bald in dieser, bald in jener Richtung auf einander folgen. Die $n-1$ folgenden Gleichungen haben Integrale, wie

$$\frac{\sqrt{A_1}-\sqrt{A-B}}{\sqrt{A_1}+\sqrt{A-B}}\cdot\frac{\sqrt{A_2}-\sqrt{A-B}}{\sqrt{A_2}+\sqrt{A-B}}\cdot\ldots\cdot\frac{\sqrt{A_n}-\sqrt{A-B}}{\sqrt{A_n}+\sqrt{A-B}}=\text{const.},$$

u. s. f., wenn man B durch $C, D, \ldots J$ ersetzt. Dies ist übrigens der einzige Fall, wo alle jene sogenannten Projektionen auch der Lage nach reell sind.

Indem wir wieder zum allgemeinen Fall zurückkehren, bemerken wir, dass die Gleichungen (8) unter die Form

$$\frac{\partial S}{\partial \mathfrak{A}_2}=0,\ \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{A}_3}=0,\ldots,\ \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{A}_n}=0$$

zu bringen sind. Daraus ergiebt sich folgende Vorschrift für die Bestimmung des kürzesten Weges zwischen zweien gegebenen Endlösungen. Man lege durch diese die n Paare konfokaler Kontinuen der gleichen Gattung, nehme die Summe der Projektionen, welche jedes Paar auf einer und derselben Krümmungslinie des Systems abschneidet, wiederhole das Verfahren so lange in Beziehung auf successive Krümmungslinien, bis man endlich eine gefunden hat, in deren nächster Umgebung die Variation jener Summe sogenannter Projektionen verschwindet. Die Summe selbst ist dann die Länge des kürzesten Weges, und jedes zum Strahl verlängerte Element wird die $n-1$ festen Kontinuen des Systems, die in jener Krümmungslinie sich schneiden, berühren, wodurch die Richtung jedes Elements, also auch der Verlauf des ganzen Weges hinreichend bestimmt sind. — Es versteht sich freilich von selbst, dass diese Elemente sich alle zu einem einzigen Strahle zusammensetzen; aber um der Uebereinstimmung mit dem Folgenden willen haben wir dem Satze diese Fassung gegeben.

Wir können das Gesagte durch eine einzige identische Formel für das Wegelement ds ausdrücken.

Wenn in den Gleichungen (5) die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ gewöhnlichen Variabeln $x, y, \ldots$ entsprechen, so mögen $m, \mu_2\,\omega, \mu_3\,\omega, \ldots \mu_n\,\omega$ den sonst mit $p_1, p_2, \ldots p_n$ bezeichneten Perpendikeln entsprechen. Es ist dann

$$\frac{1}{\mu^2}=\frac{\lambda_1^2}{(A_1-\mathfrak{A})^2}+\frac{\lambda_2^2}{(A_2-\mathfrak{A})^2}+\cdots+\frac{\lambda_n^2}{(A_n-\mathfrak{A})^2},$$

wo $\mathfrak{A}$, μ immer mit demselben Zeiger zu versehen sind;

$$m^2 = \frac{(1+\omega A_1)(1+\omega A_2)\ldots(1+\omega A_n)}{(1+\omega \mathfrak{A}_2)(1+\omega \mathfrak{A}_3)\ldots(1+\omega \mathfrak{A}_n)} = 1 + \omega(\Sigma A - \Sigma \mathfrak{A}) + \text{etc.}$$

Die Gleichung

$$\frac{m^2}{1+\omega A_1} + \frac{(\mu_2\,\omega)^2}{\omega(A_1-\mathfrak{A}_2)} + \frac{(\mu_3\,\omega)^2}{\omega(A_1-\mathfrak{A}_3)} + \cdots + \frac{(\mu_n\,\omega)^2}{\omega(A_1-\mathfrak{A}_n)} = 1$$

verwandelt sich dadurch in

$$\Sigma A - \Sigma \mathfrak{A} - A_1 + \frac{\mu_2^2}{A_1-\mathfrak{A}_2} + \frac{\mu_3^2}{A_1-\mathfrak{A}_3} + \cdots + \frac{\mu_n^2}{A_1-\mathfrak{A}_n} = 0,$$

u. s. f., indem für A_1 nach und nach $A_2, A_3, \ldots A_n$ gesetzt wird. Zieht man die zweite der n so erhaltenen Gleichungen von der ersten ab und dividiert durch $A_2 - A_1$, so folgt

$$\Sigma \frac{\mu\,\mu}{(A_1-\mathfrak{A})(A_2-\mathfrak{A})} = -1, \text{ etc.}$$

Vertauscht man hier A_2 mit A_3 und zieht beide Gleichungen von einander ab, so folgt leicht

$$\Sigma \frac{\mu\,\mu}{(A_1-\mathfrak{A})(A_2-\mathfrak{A})(A_3-\mathfrak{A})} = 0, \text{ etc.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Es ist ferner

$$\frac{m^2}{(1+\omega A_1)^2} + \Sigma \frac{(\mu\,\omega)^2}{[\omega(A_1-\mathfrak{A})]^2} = \frac{1}{\lambda_1^2},$$

oder, wenn $\omega = 0$ gesetzt wird,

$$1 + \Sigma \frac{\mu\,\mu}{(A_1-\mathfrak{A})^2} = \frac{1}{\lambda_1^2}, \text{ etc.}$$

und, wenn man $1 + \Sigma \frac{\mu\,\mu}{(A_1-\mathfrak{A})(A_2-\mathfrak{A})} = 0$ subtrahiert,

$$-(A_1-A_2)\,\Sigma \frac{\mu\,\mu}{(A_1-\mathfrak{A})^2(A_2-\mathfrak{A})} = \frac{1}{\lambda_1^2}, \text{ etc.} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Diese Vorbereitungen sollen uns zur Verwandlung der identischen Formel (1) dienen. Setzen wir $p = q\,\lambda$, so wird das dortige

$$\frac{d A_1}{\lambda_1 . 2 p_1} - \frac{d A_2}{\lambda_2 . 2 p_2} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_1}\frac{d A_1}{2 q_1} - \frac{1}{\lambda_2 \lambda_2}\frac{d A_2}{2 q_2}$$

$$= -(A_1-A_2)\left\{\frac{d A_1}{2 q_1}\,\Sigma \frac{\mu\,\mu}{(A_1-\mathfrak{A})^2(A_2-\mathfrak{A})} + \frac{d A_2}{2 q_2}\,\Sigma \frac{\mu\,\mu}{(A_1-\mathfrak{A})(A_2-\mathfrak{A})^2}\right\}$$

vermöge der Gleichungen (10), und wenn man die Gleichungen (9) hinzunimmt:

$$= -(A_1 - A_2)\,\Sigma \frac{\mu\mu}{(A_1-\mathfrak{A})(A_2-\mathfrak{A})} \left\{ \frac{1}{A_1-\mathfrak{A}} \frac{dA_1}{2q_1} + \frac{1}{A_2-\mathfrak{A}} \frac{dA_2}{2q_2} + \cdots + \frac{1}{A_n-\mathfrak{A}} \frac{dA_n}{2q_n} \right\}.$$

Wird nun

$$dS = \frac{dA_1}{2q_1} + \frac{dA_2}{2q_2} + \cdots + \frac{dA_n}{2q_n}$$

gesetzt, so ist der eingeklammerte Ausdruck $= -2\,d\frac{\partial S}{\partial \mathfrak{A}}$; also

$$\frac{dA_1}{\lambda_1 . 2p_1} - \frac{dA_2}{\lambda_2 . 2p_2} = 2(A_1 - A_2)\,\Sigma \frac{\mu\mu}{(A_1-\mathfrak{A})(A_2-\mathfrak{A})}\, d\frac{\partial S}{\partial \mathfrak{A}},$$

und zuletzt

$$ds = \sqrt{dS^2 + 4\,\Sigma\left\{\lambda_1\lambda_2(A_1-A_2)\,\Sigma\frac{\mu\mu}{(A_1-\mathfrak{A})(A_2-\mathfrak{A})}\,d\frac{\partial S}{\partial \mathfrak{A}}\right\}^2} \quad \ldots \quad (11)$$

Bis jetzt haben wir den kürzesten Weg in der Totalität betrachtet, von dem wir zum voraus wussten, dass er ein Strahl ist. Die letzte identische Formel (11) kann nun aber auch unmittelbar zur Bestimmung des kürzesten Weges auf einem quadratischen Kontinuum oder auf dem Durchschnitt mehrerer konfokaler Kontinuen benutzt werden. — Wenn z. B. der kürzeste Weg auf dem Durchschnitte der α konfokalen Kontinuen $A_1, A_2, \ldots A_\alpha$ verlangt wird, so sind ihre Axenquadrate konstant; es wird daher

$$dS = \frac{dA_{\alpha+1}}{2q_{\alpha+1}} + \frac{dA_{\alpha+2}}{2q_{\alpha+2}} + \cdots + \frac{dA_n}{2q_n},$$

wo in den Ausdrücken für q die frühern Axenquadrate $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \ldots \mathfrak{A}_{\alpha+1}$ nunmehr durch die ebenfalls konstanten $A_1, A_2, \ldots A_\alpha$ ersetzt sind. Die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\alpha$ verschwinden, und für die übrigen ist

$$\lambda_{\alpha+1}^2 + \lambda_{\alpha+2}^2 + \cdots + \lambda_n^2 = 1,$$

$$\frac{\lambda_{\alpha+1}^2}{A_{\alpha+1}-\mathfrak{A}_i} + \frac{\lambda_{\alpha+2}^2}{A_{\alpha+2}-\mathfrak{A}_i} + \cdots + \frac{\lambda_n^2}{A_n-\mathfrak{A}_i} = 0; \; [i = \alpha+2, \alpha+3, \ldots n]$$

$$\frac{1}{\mu\mu} = \left(\frac{\lambda_{\alpha+1}}{A_{\alpha+1}-\mathfrak{A}}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_{\alpha+2}}{A_{\alpha+2}-\mathfrak{A}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\lambda_n}{A_n-\mathfrak{A}}\right)^2.$$

Nach dieser Verminderung der Gliederzahl fährt die identische Formel (11) zu bestehen fort, und es ist klar, dass auf dem gegebenen $(n-\alpha)$-fachen Kontinuum zwischen irgend zweien gegebenen Grenzlösungen immer S von ihrem Verbindungswege unabhängig ist,

und daher im allgemeinen $\int ds > S$ sein wird. Nun reichen aber die $n - \alpha - 1$ Bedingungen $\frac{\partial S}{\partial \mathfrak{A}} = 0$ gerade hin, um die $n - \alpha - 1$ arbiträren Konstanten $\mathfrak{A}$ zu bestimmen, und dann zeigt wiederum die Formel (11), dass, wenn der Verbindungsweg durch die $n - \alpha - 1$ Differentialgleichungen $d\frac{\partial S}{\partial \mathfrak{A}} = 0$ bestimmt wird, $\int ds = S$ wird. Der so bestimmte Verbindungsweg ist also unter allen der kürzeste.

Wir wollen noch einen ganz speziellen Fall erwähnen, wo elliptische Integrale hinreichen, um einen kürzesten Weg auf dem allgemeinen quadratischen Kontinuum in der n-fachen Totalität darzustellen. Es sei $\alpha = 1$, (A_1) das feste Kontinuum, $\mathfrak{H}_3 = 0$, $\mathfrak{G}_4 = 0, \ldots, \mathfrak{C}_{n-1} = 0$, $\mathfrak{B}_n = 0$. Sind v, w die letzten Variabeln, so ist die den Kontinuen $A_1, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4, \ldots \mathfrak{A}_n$ gemeinsame Krümmungslinie durch die Gleichungen

$$y = 0,\ z = 0, \ldots, v = 0,\ \frac{x^2}{A_1} + \frac{w^2}{J_1} = 1$$

bestimmt, also eine Ellipse. Diese wird von allen Kontinuen, welche nicht zur ersten Gattung gehören, geschnitten. Alle $n - 1$ Projektionen eines Stückes des kürzesten Weges sind also Bogen der genannten Ellipse und reell vorhanden; es ist $q^2 = AJ : (A - A_1)$,

$$S = \int \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_2 - A_1}{A_2 J_2}}\, dA_2 + \int \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_3 - A_1}{A_3 J_3}}\, dA_3 + \cdots + \int \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_n - A_1}{A_n J_n}}\, dA_n,$$

und die $n - 2$ Wegesgleichungen sind

$$\int \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_2 - A_1}{A_2 J_2}}\, \frac{dA_2}{B_2} + \int \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_3 - A_1}{A_3 J_3}}\, \frac{dA_3}{B_3} + \cdots + \int \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_n - A_1}{A_n J_n}}\, \frac{dA_n}{B_n} = 0,$$

etc.

$$\int \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_2 - A_1}{A_2 J_2}}\, \frac{dA_2}{H_2} + \int \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_3 - A_1}{A_3 J_3}}\, \frac{dA_3}{H_3} + \cdots + \int \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_n - A_1}{A_n J_n}}\, \frac{dA_n}{H_n} = 0.$$

Die Formel (11), aus der wir bei der allgemeinen Aufgabe die Minimumsbedingungen, in Form von Differentialgleichungen erster Ordnung mit getrennten Variabeln, unmittelbar ablesen konnten, ersparte uns den für solche Zwecke gewöhnlichen Gebrauch der Variationsrechnung, welche zunächst auf Differentialgleichungen zweiter Ordnung führt, deren erste Integration schon sehr schwierig erscheint. Wir wollen nun zeigen, wie auch diese ziemlich leicht ausgeführt werden kann.

Sind $A_1, A_2, \ldots A_\alpha$ die ersten Axenquadrate der festen konfokalen Kontinuen, auf deren Durchschnitt ein kürzester Weg angegeben werden soll, so giebt die Variationsrechnung folgende Bedingungen zweiter Ordnung:

$$d\,\frac{dx}{ds} = \left(\frac{h_1}{A_1} + \frac{h_2}{A_2} + \cdots + \frac{h_\alpha}{A_\alpha}\right) x\,ds, \quad d\,\frac{dy}{ds} = \left(\frac{h_1}{B_1} + \frac{h_2}{B_2} + \cdots + \frac{h_\alpha}{B_\alpha}\right) y\,ds \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

etc.,

wo $h_1, h_2, \ldots h_\alpha$ zu eliminierende Konstanten bedeuten. Da eine der Gleichungen (12) eine vollständige Folge der übrigen ist, so ist nach geschehener Elimination die Zahl der wesentlichen Gleichungen $n - \alpha - 1$. Die erste Integration wird also nur dann vollständig sein, wenn sie eben so viele arbiträre Konstanten einführt.

Es seien nun $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots \mathfrak{J}$ die konstanten Axenquadrate irgend eines mit den gegebenen konfokalen Kontinuums; man multipliziere die Gleichungen (12) erstens mit $\frac{x}{\mathfrak{A}}, \frac{y}{\mathfrak{B}}, \ldots$, zweitens mit $\frac{dx}{\mathfrak{A}\,ds}, \frac{dy}{\mathfrak{B}\,ds}, \ldots$, und addiere; man erhält so die zwei Gleichungen

$$\Sigma\,\frac{x}{\mathfrak{A}}\,d\,\frac{dx}{ds} = \left(\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}} - 1\right)\left(\frac{h_1}{A_1 - \mathfrak{A}} + \frac{h_2}{A_2 - \mathfrak{A}} + \cdots + \frac{h_\alpha}{A_\alpha - \mathfrak{A}}\right) ds,$$

$$\Sigma\,\frac{dx}{\mathfrak{A}\,ds}\,d\,\frac{dx}{ds} = \Sigma\,\frac{x\,dx}{\mathfrak{A}\,ds} \times \left(\frac{h_1}{A_1 - \mathfrak{A}} + \frac{h_2}{A_2 - \mathfrak{A}} + \cdots + \frac{h_\alpha}{A_\alpha - \mathfrak{A}}\right) ds,$$

und hieraus durch Elimination des die Faktoren h enthaltenden Aggregats und nach gehöriger Reduktion:

$$dU = d\left\{\left(\Sigma\,\frac{x\,dx}{\mathfrak{A}\,ds}\right)^2 - \left(\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}} - 1\right)\Sigma\,\frac{dx^2}{\mathfrak{A}\,ds^2}\right\} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Wir haben also ein erstes Integral $U =$ const. gefunden. Es muss aber auffallen, dass für die Darstellung eines und desselben Weges alle beliebigen Werte der Konstanten $\mathfrak{A}$ gebraucht werden können. Man kann nichts anderes daraus schliessen, als dass die Integralgleichung in Beziehung auf $\mathfrak{A}$ identisch sein müsse, sobald $x, y, \ldots$ in Funktion einer einzigen Variabeln, wie es der gesuchte Weg verlangt, ausgedrückt sind. Betrachtet man nun die Grössen $x, y, \ldots, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \ldots$, welche irgend einem Wegeselement entsprechen, als gegeben, so findet man U, mit Weglassung der sich aufhebenden Glieder, als ein Aggregat von Brüchen, deren Nenner teils einfach $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$, teils Produkte, wie $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$, sind, während in den Zählern $\mathfrak{A}$ gar nicht vorkommt; setzt man $\mathfrak{A}$ unendlich gross, in welchem Falle die Verhältnisse $\mathfrak{A} : \mathfrak{B} : \mathfrak{C} : \ldots$ unendlich wenig von der Einheit abweichen, so reduziert sich U auf $\frac{1}{\mathfrak{A}}$. Daher ist $U = \varphi(\mathfrak{A}) : \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C} \ldots \mathfrak{J}$, wo φ eine ganze Funktion $(n-1)$-ten Grades bezeichnet, deren höchstes Glied den Koeffizienten 1 hat. Setzt man $\mathfrak{A} = A_1, A_2, \ldots A_\alpha$, so wird $\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}} - 1 = 0$, $\Sigma\,\frac{x\,dx}{\mathfrak{A}\,ds} = 0$, also $U = 0$. Wir kennen also schon α Wurzeln der Gleichung $\varphi(\mathfrak{A}) = 0$, die $n - 1 - \alpha$ übrigen

seien $\mathfrak{A}_{\alpha+2}, \mathfrak{A}_{\alpha+3}, \ldots \mathfrak{A}_n$. Demnach haben wir endlich das Integral der Gleichung (13) in seiner wahren Form, nämlich:

$$\left(\Sigma \frac{x\,dx}{\mathfrak{A}\,ds}\right)^2 - \left(\Sigma \frac{x^2}{\mathfrak{A}} - 1\right) \Sigma \frac{dx^2}{\mathfrak{A}\,ds^2}$$
$$= \frac{(\mathfrak{A}-A_1)(\mathfrak{A}-A_2)\ldots(\mathfrak{A}-A_\alpha)(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_{\alpha+2})(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_{\alpha+3})\ldots(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_n)}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots\mathfrak{H}\mathfrak{J}} \quad . \; . \; . \quad (14)$$

Da diese Integralgleichung wegen ihrer identischen Beschaffenheit in Beziehung auf die Unbestimmte $\mathfrak{A}$ ein ganzes System von Gleichungen in sich schliesst und die geforderte Zahl $n - \alpha - 1$ arbiträrer Konstanten $\mathfrak{A}_{\alpha+2}, \mathfrak{A}_{\alpha+3}, \ldots \mathfrak{A}_n$ enthält, so ist diese erste Integration des Systems (12) vollständig.

Um das Zusammenfallen der Gleichungen (4) und (14) nachzuweisen, bezeichnen wir die Kosinus der Winkel, welche das Wegelement ds mit den Normalen der $n - \alpha$ Variabeln konfokalen Kontinuen bildet, mit

$$\lambda_{\alpha+1}, \lambda_{\alpha+2}, \ldots \lambda_n; \text{ dann ist } dA_i = 2\,\lambda_i\,p_i\,ds, \; [i = \alpha+1, \alpha+2, \ldots n],$$

und wenn das Summenzeichen S sich nur auf diese letzten Zeiger erstreckt,

$$\frac{dx}{ds} = x \,.\, S\,\frac{\lambda p}{A}, \quad \frac{dy}{ds} = y \,.\, S\,\frac{\lambda p}{B}, \text{ etc.,}$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = x^2 .\, S\,\frac{\lambda^2 p^2}{A^2} + 2\,x^2 .\, S\,\frac{\lambda\,\lambda' p\,p'}{A\,A'}, \text{ etc.,}$$

$$\Sigma\,\frac{dx^2}{\mathfrak{A}\,ds^2} = S\,\lambda^2 p^2 \left(\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}\,A^2}\right) + 2\,S\,\lambda\,\lambda' p\,p' \left(\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}\,A\,A'}\right);$$

aber

$$\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}\,A^2} = \frac{1}{(A-\mathfrak{A})^2}\left(\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}} - \Sigma\,\frac{x^2}{A}\right) - \frac{1}{A-\mathfrak{A}}\,\Sigma\,\frac{x^2}{A^2}$$
$$= \frac{1}{(A-\mathfrak{A})^2}\left(\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}} - 1\right) - \frac{1}{p^2(A-\mathfrak{A})},$$

$$\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}\,A\,A'} = \frac{1}{(A-\mathfrak{A})(A'-\mathfrak{A})}\left(\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}} - 1\right);$$

daher

$$\Sigma\,\frac{dx^2}{\mathfrak{A}\,ds^2} = \left(\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}} - 1\right)\left(S\,\frac{\lambda p}{A-\mathfrak{A}}\right)^2 - S\,\frac{\lambda^2}{A-\mathfrak{A}}.$$

Wenn man ferner die identische Gleichung

$$\Sigma\,\frac{x^2}{\mathfrak{A}} - 1 = -\,\frac{(\mathfrak{A}-A_1)(\mathfrak{A}-A_2)\ldots(\mathfrak{A}-A_n)}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\ldots\mathfrak{H}\mathfrak{J}}$$

logarithmisch differentiiert, so erhält man

$$\Sigma \frac{x\,d\,x}{\mathfrak{A}\,d\,s} = \left(\Sigma \frac{x^2}{\mathfrak{A}} - 1\right) \cdot S \frac{\lambda p}{A - \mathfrak{A}}.$$

Mittelst dieser Formeln verwandelt sich endlich die Gleichung (14) in

$$S \frac{\lambda^2}{\mathfrak{A} - A} = \frac{(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_{\alpha+2})(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_{\alpha+3}) \dots (\mathfrak{A} - \mathfrak{A}_n)}{(\mathfrak{A} - A_{\alpha+1})(\mathfrak{A} - A_{\alpha+2}) \dots (\mathfrak{A} - A_n)},$$

woraus

$$\frac{\lambda_{\alpha+1}^2}{A_{\alpha+1} - \mathfrak{A}_i} + \frac{\lambda_{\alpha+2}^2}{A_{\alpha+2} - \mathfrak{A}_i} + \dots + \frac{\lambda_n^2}{A_n - \mathfrak{A}_i} = 0, \ [i = \alpha + 2, \ \alpha + 3, \dots n]$$

als System der $n - \alpha - 1$ Differentialgleichungen erster Ordnung des kürzesten Weges folgt, welches mit (4) zusammenfällt, indem man $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_\alpha = 0$ setzt, wie es die Konstanz der Axenquadrate $A_1, A_2, \dots A_\alpha$ erfordert.

Es ist bekannt, mit welchem Erfolg in der Statik die Begriffe des Differentialparameters und des Potentials von Gauss, Lamé, Liouville und andern eingeführt und angewandt worden sind. Die meisten hier einschlagenden Sätze sind aber durchaus nicht auf den Raum beschränkt, sondern gelten für jede beliebige Totalität. Dieses nachzuweisen, ist der Zweck der folgenden Paragraphen. Wenn darin auch das meiste dem Leser bloss als generalisierende Nachahmung der genialen Arbeiten der erwähnten Analysten erscheinen muss, so wird er doch am Ende dieses Abschnitts eine sehr allgemeine Form der Entwicklung arbiträrer Funktionen von beliebig vielen Variabeln in Reihen von periodischer Natur finden, die vielleicht einiges Interesse darbietet; überdies glaubte ich, Dinge, die mit der Theorie der vielfachen Kontinuität in so engem Zusammenhang stehen, hier nicht übergehen zu sollen.

§ 47. *Ueber die Verwandlung des Differentialparameters mittelst orthogonaler Funktionen.*

Werden auf die n unabhängigen Variabeln $x, y, \dots$ einer Funktion V die linearen und orthogonalen Transformationen

$$x = \alpha t + \alpha' t' + \alpha'' t'' + \cdots, \quad y = \beta t + \beta' t' + \beta'' t'' + \cdots, \text{ etc.}$$

angewandt, so ist

$$\frac{\partial}{\partial x} = \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \alpha' \frac{\partial}{\partial t'} + \alpha'' \frac{\partial}{\partial t''} + \cdots, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \beta \frac{\partial}{\partial t} + \beta' \frac{\partial}{\partial t'} + \cdots, \text{ etc.,}$$

woraus sogleich erhellt, dass dasselbe Rechnungsverfahren, welches

$$x^2 + y^2 + \cdots = t^2 + t'^2 + t''^2 + \cdots$$

giebt, auch zu

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \cdots = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial t'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial t''^2} + \cdots$$

führen wird. Die Operation $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \cdots$ ändert also ihre symbolische Form nicht, wenn die Variabeln orthogonal transformiert werden. D. h., wenn $x, y, \ldots$ als orthogonale Variabeln betrachtet werden, so ist jene Operation zweiter Ordnung von der Wahl des orthogonalen Systems unabhängig. Das Resultat derselben möge der Differentialparameter der gegebenen Funktion V heissen.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, wenn n Funktionen $f, f', f'', \ldots$ der n Variabeln $x, y, \ldots$ den $\frac{1}{2} n (n-1)$ Orthogonalitätsbedingungen von der Form

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f'}{\partial y} + \cdots = 0$$

genügen, den Differentialparameter

$$W = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \cdots$$

gemäss der Forderung, dass $f, f', f'', \ldots$ als unabhängige Variabeln erscheinen sollen, umzugestalten.

Zu diesem Zwecke denken wir uns das n-fache Integral $S = \int^n W\, dx\, dy \ldots$ durch ein beliebiges einfach geschlossenes Kontinuum begränzt. Die Richtungskosinus einer Normale dieses Kontinuums seien $\lambda, \mu, \nu, \ldots$; und wenn die Werte der Variabeln einer Lösung desselben zukommen, so sei $\lambda \frac{\partial}{\partial x} + \mu \frac{\partial}{\partial y} + \cdots = D$. Jenes Integral S nun zerfällt in n Teile, wie $\int^n \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx\, dy\, dz \ldots$ Bei diesem z. B. kann die auf x bezügliche Integration ausgeführt werden; sie giebt $\int^{n-1} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) dy\, dz \ldots$, wo die Klammer anzeigt, dass man vom Endwerte von $\frac{\partial V}{\partial x}$ den Anfangswert zu subtrahieren hat. Bezeichnet nun $d\omega$ ein Element des Grenzkontinuums, und wird überall die Richtung der Normale im gleichen Sinne verstanden, nämlich nach aussen, so ist beim Endwert $dy\, dz \ldots = \lambda\, d\omega$, beim Anfangswert hingegen $-\lambda\, d\omega$ (wo λ, $d\omega$ andere Werte haben

mögen als beim Endwert); die Subtraktion wird also durch dieses letzte Minuszeichen wieder aufgehoben, so dass man hat

$$\int^{n-1} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) d y\, d z \ldots = \int \lambda \frac{\partial V}{\partial x} d\omega,$$

wo das letzte Integral sich ohne Unterbrechung über alle Elemente des Grenzkontinuums erstreckt. Da Aehnliches für die übrigen Teile des Integrals S gilt, so folgt

$$S = \int D V \,.\, d\omega.$$

Die Operation D ist von der Wahl des orthogonalen Axensystems unabhängig. Man kann daher an der Stelle eines jeden Elements $d\omega$ auch die Normalen der durchgehenden Kontinuen des orthogonalen Systems $(f, f', f'', \ldots)$ als Axen gebrauchen. In Beziehung auf diese seien $\Theta, \Theta', \Theta'', \ldots$ die Richtungskosinus der Normale des Elements $d\omega$, so ist, wenn, wie früher,

$$R^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \cdots, \text{ etc.}$$

gesetzt wird,

$$\lambda = \Theta \cdot R \frac{\partial x}{\partial f} + \Theta' . R' \frac{\partial x}{\partial f'} + \cdots, \text{ etc.};$$

also

$$D = \Theta\, R \frac{\partial}{\partial f} + \Theta' R' \frac{\partial}{\partial f'} + \cdots$$

Da die Form des Elements $d\omega$ frei steht, so kann man seine Projektion auf das lineare Tangentialkontinuum $f =$ const. als orthogonales Paralleloschem auffassen, dessen Seiten $\frac{\partial f'}{R'}, \frac{\partial f''}{R''}, \ldots$ sind und daher $\Theta\, d\omega = \frac{d f' d f'' d f''' \ldots}{R' R'' R''' \ldots}$ setzen. Dadurch wird

$$\int \Theta\, R \frac{\partial V}{\partial f} d\omega = \int^{n-1} \left(\frac{R}{R' R'' R''' \ldots} \frac{\partial V}{\partial f}\right) d f'\, d f''\, d f''' \ldots$$

Dem Durchschnitt der Kontinuen $f', f'', \ldots$ entlang zieht sich ein Element der zugleich mit S begrenzten Totalität $\int^n d x\, d y\, d z \ldots$, welches nur eine endliche Ausdehnung hat und an welchem Anfang und Ende zu unterscheiden ist, gerade wie bei der Anwendung der ursprünglichen Variabeln $x, y, \ldots$ Es ist also auch

$$\int \Theta\, R \frac{\partial V}{\partial f} d\omega = \int^n \frac{\partial \left(\frac{R}{R' R'' R''' \ldots} \frac{\partial V}{\partial f}\right)}{\partial f} d f\, d f' d f'' d f''' \ldots;$$

also, wenn man wieder alle Teile zusammenfasst:

$$S=\int^{n}\left\{\frac{\partial\cdot\dfrac{R}{R'R''R'''\dots}\dfrac{\partial V}{\partial f}}{\partial f}+\frac{\partial\cdot\dfrac{R'}{RR''R'''\dots}\dfrac{\partial V}{\partial f'}}{\partial f'}+\frac{\partial\cdot\dfrac{R''}{RR'R'''\dots}\dfrac{\partial V}{\partial f''}}{\partial f''}+\cdots\right\}df\,df'\,df''\dots$$

Da aber das Element der Totalität als Paralleloschem aufgefasst werden kann, dessen Seiten $\frac{df}{R}, \frac{df'}{R'}, \frac{df''}{R''}, \dots$ sind, so ist

$$S=\int^{n} W\,dx\,dy\,dz\dots=\int^{n}\frac{W}{RR'R''R'''\dots}\,df\,df'\,df''\,df'''\dots$$

Die begrenzte Totalität, über welche sich das Integral S erstreckt, kann so klein angenommen werden, als man nur will; folglich muss der Differentialparameter

$$W=RR'R''\dots\left\{\frac{\partial}{\partial f}\left(\frac{R}{R'R''R'''\dots}\frac{\partial V}{\partial f}\right)+\frac{\partial}{\partial f'}\left(\frac{R'}{RR''R'''\dots}\frac{\partial V}{\partial f'}\right)+\frac{\partial}{\partial f''}\left(\frac{R''}{RR'R'''\dots}\frac{\partial V}{\partial f''}\right)+\cdots\right\}$$

sein.

Wir wollen noch im Besondern diese Formel auf konfokale und auf polysphärische Koordinaten anwenden.

Werden die Bezeichnungen von § 45 gebraucht, so sind bei Einführung konfokaler Variabeln $f, f', f'', \dots, R, R', R'', \dots$ durch $A_1, A_2, A_3, \dots A_n, 2p_1, 2p_2, \dots 2p_n$ zu ersetzen, und man hat

$$\begin{aligned}W&=4p_1p_2\dots p_n\left\{\frac{\partial}{\partial A_1}\left(\frac{p_1^2}{p_1p_2\dots p_n}\frac{\partial V}{\partial A_1}\right)+\cdots+\frac{\partial}{\partial A_n}\left(\frac{p_n^2}{p_1p_2\dots p_n}\frac{\partial V}{\partial A_n}\right)\right\}\\&=4\frac{R_1R_2\dots R_n}{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial A_1}\left(\frac{\Phi_1R_1}{R_2R_3\dots R_n}\frac{\partial V}{\partial A_1}\right)+\cdots+\frac{\partial}{\partial A_n}\left(\frac{\Phi_nR_n}{R_1R_2\dots R_{n-1}}\frac{\partial V}{\partial A_n}\right)\right\}\\&=\frac{4}{\Omega}\left\{\Phi_1R_1\frac{\partial\,.\,R_1\dfrac{\partial V}{\partial A_1}}{\partial A_1}+\Phi_2R_2\frac{\partial\,.\,R_2\dfrac{\partial V}{\partial A_2}}{\partial A_2}+\cdots+\Phi_nR_n\frac{\partial\,.\,R_n\dfrac{\partial V}{\partial A_n}}{\partial A_n}\right\},\end{aligned}$$

weil z. B. $\Phi_1, R_2, R_3, \dots R_n$ die Variable A_1 nicht enthalten.

Wenn die polysphärischen Transformationen

$$x_1=r\cos\varphi_1,\quad x_2=r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\quad x_3=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,\ \dots.$$
$$\dots,\ x_{n-1}=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1},\quad x_n=r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}$$

sind, so muss man $f, f', f'', \dots; \frac{1}{R}, \frac{1}{R'}, \frac{1}{R''}, \dots$ durch $r, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}$; $1, r, r\sin\varphi_1, r\sin\varphi_1\sin\varphi_2, \dots\dots\dots, r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\dots\sin\varphi_{n-2}$ ersetzen und erhält:



$$W = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{d \cdot r^{n-1} \frac{\partial V}{\partial r}}{\partial r} + \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_2 \ldots \sin^2 \varphi_{i-1} \sin^{n-i-1} \varphi_i} \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \left(\sin^{n-i-1} \varphi_i \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} \right).$$

Eine spezielle Folgerung aus dieser Formel hat für das folgende Bedeutung; wenn nämlich $V = \frac{1}{r^{n-2}}$ ist, so wird $W = 0$.

§ 48. *Ueber das Potential.*

Wenn k eine gegebene Funktion der n Variabeln $x, y, \ldots$ bezeichnet, welche ausserhalb eines begrenzten Teiles der Totalität verschwindet, und ferner $r = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + \ldots}$ der Abstand der zwei Lösungen $(a, b, c, \ldots)$ und $(x, y, \ldots)$ ist, so ist

$$V = \int^n \frac{k}{r^{n-2}} \, dx \, dy \, dz \ldots,$$

als Funktion der Variabeln $a, b, c, \ldots$ betrachtet, das Potential der Masse $\int^n k \, dx \, dy \, dz \ldots$ für die Lösung $(a, b, \ldots)$, und die gegebene Funktion k ist die jeder Lösung $(x, y, \ldots)$ zukommende Dichtigkeit. Ist k innerhalb der Begrenzung konstant, so heisse die Masse homogen.

Bestimmung des Potentials einer homogenen Polysphäre.

Wir setzen uns vor, den Wert des Integrals

$$S_m = \int_0^\pi \frac{\sin^m \varphi \, d\varphi}{(a^2 - 2a \cos \varphi + 1)^{\frac{m}{2}}}$$

zu ermitteln, wenn m eine ganze positive Zahl ist. Ist erstens $a > 1$, so setze man $\sin \psi = a \sin(\psi - \varphi)$, so wächst ψ gleichzeitig mit φ von 0 bis π, und man hat

$$d\varphi = \left(1 - \frac{\cos \psi}{\sqrt{a^2 - \sin^2 \psi}}\right) d\psi, \quad \frac{\sin \varphi}{\sqrt{a^2 - 2a \cos \varphi + 1}} = \frac{\sin \psi}{a}.$$

Demnach ist

$$S_m = \frac{1}{a^m} \int_0^\pi \left(\sin^m \psi - \frac{\sin^m \psi \cos \psi}{\sqrt{a^2 - \sin^2 \psi}}\right) d\psi,$$

und wenn man die Elemente vereinigt, welche supplementären Werten von ψ entsprechen,

$$S_m = \frac{1}{a^m} \int_0^\pi \sin^m \psi \, d\psi = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) \cdot a^m}.$$

Ist zweitens $a < 1$, so ist

$$S_m = \frac{1}{a^m} \int_0^\pi \frac{\sin^m \varphi \, d\varphi}{\left(\left(\frac{1}{a}\right)^2 - \frac{2}{a} \cos \varphi + 1\right)^{\frac{m}{2}}};$$

also

$$S_m = \int_0^\pi \sin^m \psi \, d\psi.$$

Nach dieser Vorbereitung gehen wir an die Bestimmung des Potentials $V = \int \frac{d\omega}{r^{n-2}}$ eines totalen polysphärischen Kontinuums vom Radius 1, wenn das Massenelement mit dem Element $d\omega$ des Kontinuums identisch und a der Abstand der Lösung, für welche das Potential gesucht wird, vom Zentrum der Polysphäre ist. Bedeutet φ den Winkel, welchen der nach $d\omega$ gehende Radius mit dem genannten Abstand a, den wir als erste Axe der polysphärischen Variabeln ansehen wollen, bildet, so ist $r = \sqrt{a^2 - 2a\cos\varphi + 1}$. Das Element $d\omega$ kann als Paralleloschem von $n-1$ orthogonalen Seiten, welche den Variationen der polysphärischen Variabeln entsprechen, aufgefasst werden; seine erste Seite ist $d\varphi$, und das Produkt der übrigen mit $\sin^{n-2}\varphi$ proportional; wenn man $d\omega = \sin^{n-2}\varphi \, d\varphi \cdot d\omega'$ setzt, so ist das äquatoriale Element $d\omega'$ von φ unabhängig. Die Masse ist

$$\Omega = \int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi \, d\varphi \cdot \int^{n-2} d\omega' = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Das Potential ist also nach dem Vorigen

$$V = \frac{1}{a^{n-2}} \int_0^\pi \sin^{n-2} \psi \, d\psi \cdot \int d\omega' = \frac{\Omega}{a^{n-2}} \text{ oder } = \Omega,$$

je nachdem $a > 1$ oder $a < 1$ ist; d. h.

Das Potential eines homogenen polysphärischen Kontinuums ist für eine äussere Lösung (oder auch für eine auf dem Kontinuum selbst befindliche) gerade so, wie wenn die Masse im Zentrum vereinigt wäre; für eine innere Lösung dagegen gleich, wie auf dem Kontinuum selbst, also inwendig konstant.

Das Potential einer homogenen Polysphäre von der Dichtigkeit 1 und dem Radius r ist für eine äussere Lösung, welche um a vom Zentrum absteht,

$$V = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \frac{r^n}{a^{n-2}},$$

für eine innere Lösung dagegen

$$V = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(r^2 - \frac{n-2}{n} a^2\right).$$

Da die Funktion V nur die Variable a enthält, so ist der Differentialparameter

$$W = \frac{1}{a^{n-1}} \cdot \frac{\partial \cdot a^{n-1} \frac{\partial V}{\partial a}}{\partial a}$$

und verschwindet für eine äussere Lösung; für eine innere dagegen ist

$$W = -4 \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)}.$$

Differentialparameter des Potentials. Wir betrachten wieder eine beliebig verteilte endliche Masse und bezeichnen mit r den Abstand der variabeln Lösung, auf welche sich das Potential als Funktion bezieht, von irgend einem Element dm der gegebenen Masse; das Potential dieses Elements ist $\frac{dm}{r^{n-2}}$; da nun für ein endliches r die unendlich kleinen Dimensionen von dm nicht in Betracht kommen, so enthält dieser Ausdruck nur die Variable r, und sein Differentialparameter ist daher

$$dm \cdot \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial \cdot \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial r}\right) = 0.$$

Nun ist das Potential V der totalen Masse gleich der Summe der Potentiale ihrer Elemente; also auch der Differentialparameter W von V gleich der Summe der Differentialparameter der Potentiale aller einzelnen Elemente. Daher muss W für jede ausserhalb der Masse befindliche Lösung verschwinden.

Um nun auch für eine der Masse angehörende Lösung den Wert von W zu finden, beschreiben wir um dieselbe eine Polysphäre von unendlich kleinem Radius, so dass mit Vernachlässigung von Grössen erster Ordnung die Dichtigkeit k innerhalb dieser Polysphäre als konstant angenommen werden darf. Dann teilen wir W in einen dieser Polysphäre und einen der ganzen übrigen Masse entsprechenden Teil. Jener ist nach dem Obigen $-4\,k\,\pi^{\frac{n}{2}} : \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)$, dieser ist Null. Also ist überhaupt:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \cdots = -4 \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)} k.$$

D. h. Der Differentialparameter des Potentials einer gegebenen Masse für irgend eine Lösung ist $-(n-2)$ mal das Produkt des totalen Masses des polysphärischen Kontinuums vom Radius 1 und der für die Lösung stattfindenden Dichtigkeit.

§ 49. *Bestimmung des Potentials der von einem quadratischen Kontinuum erster Gattung umschlossenen homogenen Totalität.*

Es sei $\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\cdots=1$ die Gleichung des Grenzkontinuums, $(a, b, \ldots)$ die Lösung, für welche das Potential V gesucht werden soll, $r^2=(x-a)^2+(y-b)^2+\cdots$,

$$V=\int^n \frac{dx\,dy\,dz\ldots}{r^{n-2}}, \quad \left[\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\cdots<1\right],$$

$$dV=X\,da+Y\,db+Z\,dc+\cdots;$$

dann ist

$$X=(n-2)\int^n \frac{dx\,dy\,dz\ldots}{r^n}(x-a)=-\int^n \frac{\partial\cdot\frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x}dx\,dy\,dz\cdots=-\int^{n-1}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)dy\,dz\ldots,$$

wo die Klammer den Unterschied zwischen dem End- und Anfangswert anzeigt. Es seien nun $A', B', \ldots$ die Axenquadrate des durch die Lösung $(a, b, \ldots)$ gehenden konfokalen Kontinuums erster Gattung, also $\frac{a^2}{A'}+\frac{b^2}{B'}+\cdots=1$, ferner $x=\sqrt{A}\cdot x'$, $y=\sqrt{B}\cdot y', \ldots$; $a=\sqrt{A'}\cdot a'$, $b=\sqrt{B'}\cdot b', \ldots$; dann wird

$$X=-\sqrt{BC\ldots}\int^{n-1}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)dy'\,dz'\ldots,$$

wo das Integral sich über das ganze durch die Gleichung $x'^2+y'^2+\cdots=1$ bestimmte polysphärische Kontinuum erstreckt. Wird das Element dieses Kontinuums mit $d\sigma$ bezeichnet, so kann $dy'\,dz'\ldots$ durch $x'\,d\sigma$ ersetzt werden, und man hat

$$X=-\sqrt{BC\ldots}\int \frac{x'\,d\sigma}{r^{n-2}}.$$

Wenn wir nun den Wert von r näher betrachten, so ergiebt sich eine merkwürdige Transformation des vorliegenden Integrals. Es ist nämlich

$$r^2=A\,x'^2+B\,y'^2+\cdots-2\left(\sqrt{AA'}\cdot a'\,x'+\sqrt{BB'}\cdot b'\,y'+\cdots\right)+A'\,a'^2+B'\,b'^2+\cdots$$

Da aber in der ganzen Ausdehnung des letzten Integrals $x'^2 + y'^2 + \cdots = 1 = a'^2 + b'^2 + \cdots$, und überdies $A - A' = B - B' = \cdots$ ist, so hat man auch

$$(A - A')\,x'^2 + (B - B')\,y'^2 + \cdots = (A - A')\,a'^2 + (B - B')\,b'^2 + \cdots,$$

oder

$$A\,x'^2 + B\,y'^2 + \cdots + A'\,a'^2 + B'\,b'^2 + \cdots = A'\,x'^2 + B'\,y'^2 + \cdots + A\,a'^2 + B\,b'^2 + \cdots;$$

folglich auch

$$r^2 = A'\,x'^2 + B'\,y'^2 + \cdots - 2\left(\sqrt{AA'}\cdot a'\,x' + \sqrt{BB'}\cdot b'\,y' + \cdots\right) + A\,a'^2 + B\,b'^2 + \cdots;$$

d. h. wenn die polysphärischen Variabeln sich gleich bleiben, so darf man beide konfokale Kontinua mit einander vertauschen, ohne dass der Wert von r sich ändert. Es sei nun

$$x_1 = \sqrt{B'C'\ldots}\int \frac{x'\,d\sigma}{r^{n-2}},$$

also $X : X_1 = \sqrt{BC\ldots} : \sqrt{B'C'\ldots}$; und ferner sei $a_1 = \sqrt{A}\cdot a'$, $b_1 = \sqrt{B}\cdot b', \ldots,$ $dV_1 = X_1\,da_1 + Y_1\,db_1 + Z_1\,dc_1 + \cdots$; dann ist V_1 das Potential der vom zweiten konfokalen Kontinuum (A') umschlossenen Totalität für eine auf dem ersten Kontinuum (A) befindliche Lösung $(a_1, b_1, \ldots)$. Dadurch sind die zwei Fälle, wo die Lösung, für welche das Potential gesucht wird, innerhalb, und wo sie ausserhalb des quadratischen Grenzkontinuums liegt, in gegenseitige Beziehung gebracht.

Wir behandeln nun zuerst den Fall, wo die Lösung innerhalb liegt, indem wir von der Formel

$$X = (n-2)\int^n \frac{(x-a)\,dx\,dy\ldots}{r^n}$$

ausgehen und polysphärische Variabeln einführen, welche die Lösung $(a, b, \ldots)$ zum Zentrum haben. Es sei $x = a + r\lambda$, $y = b + r\mu, \ldots,$ also $\lambda^2 + \mu^2 + \cdots = 1$; und das Element des polysphärischen Kontinuums vom Radius sei $d\sigma$; dann wird das Element der Totalität $r^{n-1}\,dr\,d\sigma$, und wir haben demnach $X = (n-2)\int\int \lambda\,dr\,d\sigma =$ $= (n-2)\int \lambda\,r\,d\sigma$, wo r stets positiv zu nehmen, und das Integral über das ganze polysphärische Kontinuum auszudehnen ist. Da die Werte von r im letzten Integral sich auf das Grenzkontinuum $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots = 1$ beziehen, so hat man $vr^2 + 2\,ur = h$, wenn

$$v = \frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \cdots, \qquad u = \frac{\lambda a}{A} + \frac{\mu b}{B} + \cdots. \qquad h = 1 - \left(\frac{a^2}{A} + \frac{b^2}{B} + \cdots\right)$$

gesetzt wird; nach der Voraussetzung ist h positiv, und es folgt

$$r = \frac{-u + \sqrt{u^2 + hv}}{v},$$

wo die Wurzelgrösse als positiv gelten soll. Vergleicht man nun zwei Elemente des Integrals X, für welche die polysphärischen Variabeln $\lambda, \mu, \ldots$ sämtlich gleich und entgegengesetzt sind, so sind die entsprechenden Werte von $-\lambda u : v$ einander gleich, hingegen die Werte von $\lambda \sqrt{u^2 + hv} : v$ gleich und entgegengesetzt. Dadurch ist die Wurzelgrösse beseitigt. Vergleicht man jetzt auch zwei Elemente, für welche $u, v, \ldots$ gleich, aber λ gleich und entgegengesetzt ist, so ersieht man leicht, dass das Integral sich auf

$$X = -(n-2)\frac{a}{A}\int \frac{\lambda^2\, d\sigma}{\frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \cdots}$$

reduziert. Der Wert von X ändert sich also nicht, wenn man auch alle linearen Dimensionen der Masse proportional verändert, wofern dann nur die Lösung $(a, b, \ldots)$ immer noch innerhalb bleibt.

Um nun für diesen Fall einer innern Lösung auch den Wert des Potentials V zu bestimmen, wollen wir denselben zuerst für das Zentrum suchen. Es ist für dieses

$$r^2\left(\frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \cdots\right) = 1, \qquad V = \int\!\!\int r\, dr\, d\sigma = \frac{1}{2}\int r^2\, d\sigma,$$

also

$$V = \frac{1}{2}\int \frac{d\sigma}{\frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \cdots}.$$

Diese Formel giebt uns die Konstante, wenn wir die Gleichung $dV = X\,da + Y\,db + \cdots$ integrieren. Wir bekommen für irgend eine innere Lösung

$$V = \frac{1}{2}\int \frac{d\sigma}{\frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \cdots} - \frac{n-2}{2}\int \frac{\frac{a^2\lambda^2}{A} + \frac{b^2\mu^2}{B} + \cdots}{\frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \cdots}\, d\sigma. \quad \ldots \quad (1)$$

Es wird sich in der Folge zeigen, dass diese $(n-1)$-fachen Integrale sich in einfache verwandeln lassen.

Wir wenden uns nun zur Behandlung des schwierigern Falls einer äussern Lösung. Aus dem früher Gesagten folgt leicht

$$\frac{1}{n-2} X = -\frac{\sqrt{ABC\ldots J}}{\sqrt{A'B'C'\ldots J'}} \frac{a}{A'} \int \frac{\lambda^2 \, d\sigma}{\frac{\lambda^2}{A'} + \frac{\mu^2}{B'} + \frac{\nu^2}{C'} + \cdots}.$$

Wenn wir aber die Gleichung $dV = X\,da + Y\,db + \cdots$ integrieren wollen, so dürfen wir nicht vergessen, dass vermöge der Bedingung $\frac{a^2}{A'} + \frac{b^2}{B'} + \frac{c^2}{C'} + \cdots = 1$ nunmehr A' eine Funktion von $a, b, c, \ldots$ ist. Wären $A', B', \ldots$ konstant, so bekäme man bei der Integration die Funktion

$$U = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{AB\ldots J}}{\sqrt{A'B'\ldots J'}} \int \frac{\frac{a^2\lambda^2}{A'} + \frac{b^2\mu^2}{B'} + \cdots}{\frac{\lambda^2}{A'} + \frac{\mu^2}{B'} + \cdots} \, d\sigma.$$

Durch vollständige Differentiation ergiebt sich aber

$$dU = \frac{dV}{n-2} + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{AB\ldots J}}{\sqrt{A'B'\ldots J'}} \, dA' \cdot \Sigma \frac{1}{A'} \cdot \int \frac{\Sigma \frac{a^2\lambda^2}{A'}}{\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}} \, d\sigma$$

$$+ \frac{dA'}{2} \cdot \frac{\sqrt{AB\ldots J}}{\sqrt{A'B'\ldots J'}} \int \frac{\Sigma \frac{a^2\lambda^2}{A'^2}}{\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}} \, d\sigma - \frac{dA'}{2} \cdot \frac{\sqrt{AB\ldots J}}{\sqrt{A'B'\ldots J'}} \int \frac{\Sigma \frac{\lambda^2}{A'^2} \cdot \Sigma \frac{a^2\lambda^2}{A'}}{\left(\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}\right)^2} \, d\sigma.$$

Wir müssen suchen, für das letzte Integral, wo das Quadrat von $\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}$ im Nenner steht, wegzuschaffen. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} \left(\frac{\lambda \, \Sigma \frac{a^2\lambda^2}{A'}}{\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}} \right) = \frac{\Sigma \frac{a^2\lambda^2}{A'}}{\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}} + 2 \frac{\frac{a^2\lambda^2}{A'}}{\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}} - 2 \frac{\frac{\lambda^2}{A'} \Sigma \frac{a^2\lambda^2}{A'}}{\left(\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}\right)^2};$$

$$\Sigma \int \frac{\partial}{\partial\lambda} \left(\frac{\frac{\lambda}{A'} \Sigma \frac{a^2\lambda^2}{A'}}{\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}} \right) d\sigma = \Sigma \frac{1}{A'} \cdot \int \frac{\Sigma \frac{a^2\lambda^2}{A'}}{\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}} \, d\sigma + 2 \int \frac{\Sigma \frac{a^2\lambda^2}{A'^2}}{\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}} \, d\sigma - 2 \int \frac{\Sigma \frac{\lambda^2}{A'^2} \cdot \Sigma \frac{a^2\lambda^2}{A'}}{\left(\Sigma \frac{\lambda^2}{A'}\right)^2} \, d\sigma. \quad (2)$$

Auf der linken Seite ist der Faktor von $d\sigma$ in Beziehung auf $\lambda, \mu, \ldots$ homogen und vom nullten Grade. Wenn man also mit $\int_0^1 n r^{n-1} \, dr = 1$ multipliziert und dann das Element $r^{n-1} \, dr \, d\sigma$ der Totalität durch $dx \, dy \ldots$ ersetzt, so kann man auch im Faktor desselben $\lambda, \mu, \ldots$ durch $x, y, \ldots$ ersetzen. Man erhält

$$n\int^{n}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{x}{A'}\,\Sigma\,\frac{a^2 x^2}{A'}}{\Sigma\,\frac{x^2}{A'}}\right)\cdot dx\,dy\,dz\cdots = n\int^{n-1}\left(\frac{\frac{x}{A'}\,\Sigma\,\frac{a^2 x^2}{A'}}{\Sigma\,\frac{x^2}{A'}}\right)dy\,dz\cdots = n\int\frac{\frac{\lambda}{A'}\,\Sigma\,\frac{a^2\lambda^2}{A'}}{\Sigma\,\frac{\lambda^2}{A'}}\cdot\lambda\,d\sigma.$$
$$(x^2+y^2+\cdots<1)\qquad\qquad (x^2+y^2+\cdots=1)$$

Also ist jene Summe auf der linken Seite

$$= n\int\Sigma\,\frac{a^2\lambda^2}{A'}\,d\sigma = n\left(\frac{a^2}{A'}\int\lambda^2\,d\sigma+\frac{b^2}{B'}\int\mu^2\,d\sigma+\cdots\right),$$

oder, da offenbar $\int\lambda^2\,d\sigma=\int\mu^2\,d\sigma=\text{etc.}=\frac{1}{n}\int(\lambda^2+\mu^2+\cdots)\,d\sigma=\frac{1}{n}\int d\sigma$ ist, auch

$$=\left(\frac{a^2}{A'}+\frac{b^2}{B'}+\cdots\right)\int d\sigma=\int d\sigma = 2\,\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Durch diese Vorbereitung in den Stand gesetzt, jenes Integral, wo im Nenner das Quadrat einer Summe steht, zu entfernen, bekommen wir

$$dU=\frac{dV}{n-2}+\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{ABC\ldots J}}{\sqrt{A'B'C'\ldots J'}}\,dA',$$

und hieraus endlich

$$V=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}\sqrt{ABC\ldots J}\int_{A'}^{\infty}\frac{dA'}{\sqrt{A'B'\ldots J'}}-\frac{n-2}{2}\,\frac{\sqrt{ABC\ldots J}}{\sqrt{A'B'C'\ldots J'}}\int\frac{\Sigma\,\frac{a^2\lambda^2}{A'}}{\Sigma\,\frac{\lambda^2}{A'}}\,d\sigma,\qquad(3)$$

wo die Integrationskonstante so bestimmt ward, dass V für eine unendlich weit entfernte Lösung $(a, b\ldots)$ verschwindet.

Liegt die Lösung $(a, b\ldots)$ auf dem Grenzkontinuum (A), so muss dieser Ausdruck mit dem früher für eine innere Lösung gefundenen übereinstimmen. Man hat also

$$\int\frac{d\sigma}{\frac{\lambda^2}{A}+\frac{\mu^2}{B}+\cdots}=\frac{2\,\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}\sqrt{ABC\ldots J}\int_{A}^{\infty}\frac{dA'}{\sqrt{A'B'C'\ldots J'}},$$

wodurch ein $(n-1)$-faches Integral in ein einfaches Abelsches Integral verwandelt ist. Hiedurch zu der Vermutung geführt, dass auch das andere $(n-1)$-fache Integral, welches in (1) und (3) vorkommt, in ein einfaches sich verwandeln lasse, untersuchen

wir in dieser Absicht die oben gefundene Reduktionsgleichung (2), welche, indem wir die Accente weglassen, $a, b, \ldots$ als unabhängig annehmen und abkürzend $v = \Sigma \frac{\lambda^2}{A}$, $w = \Sigma \frac{a^2 \lambda^2}{A}$, $R = \sqrt{ABC \ldots J}$ setzen, folgende Form erhält:

$$\frac{1}{2} \Sigma \frac{a^2}{A} \cdot \int d\sigma = \frac{\partial \log R}{\partial A} \int \frac{w}{v} d\sigma - \int \frac{1}{v} \frac{\partial w}{\partial A} d\sigma - \int w \frac{\partial \frac{1}{v}}{\partial A} d\sigma$$
$$= - R \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{1}{R} \int \frac{w}{v} d\sigma \right),$$

wo die Differentialkoeffizienten im Sinne von $dA = dB = dC = \cdots = dJ$ zu verstehen sind. Integriert man so, dass beide Seiten der Gleichung für ein unendlich grosses A übereinstimmen, so wird

$$\frac{1}{R} \int \frac{w}{v} d\sigma = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_A^\infty \Sigma \frac{a^2}{A} \cdot \frac{dA}{R}.$$

Beide Fälle, einer innern und einer äussern Lösung in einem Ausdruck vereinigend, können wir nun das Endergebnis dieses §, wie folgt, aussprechen:

Ist $r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + \cdots$, und das n-fache Integral $V = \int r^{-(n-2)} dx\, dy\, dz \ldots$ durch $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots < 1$ begrenzt, wofür alle $A, B, C, \ldots$ positiv sein müssen, so ist

$$V = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)} \sqrt{ABC \ldots} \int^\infty \frac{1 - \frac{a^2}{A+u} - \frac{b^2}{B+u} - \frac{c^2}{C+u} - \cdots}{\sqrt{(A+u)(B+u)(C+u)\ldots}} du, \quad \ldots \quad (4)$$

wo als untere Grenze des Integrals $u = 0$ zu nehmen ist, wenn dadurch der Zähler des unter dem Integrationszeichen befindlichen Bruchs nicht negativ gemacht wird, sonst aber der positive Wert von u, für welchen dieser Zähler verschwindet.

Die folgende allgemeine Betrachtung wird uns einen noch kürzern Weg kennen lehren, auf dem man zu diesem Satze gelangen kann, welcher für $n = 3$ den, wenn ich nicht irre, zuerst von Ivory gefundenen Ausdruck für die Attraktion eines homogenen Ellipsoids in sich schliesst.



§ 50. *Ueber eine Verteilung von Masse auf einem quadratischen Kontinuum erster Gattung, welche zugleich mit ihrem Potential bekannt ist.*

Gelten die Bezeichnungen des § 45 und setzt man abkürzend

$$d\varphi_1 = \frac{dA_1}{2R_1},\quad d\varphi_2 = \frac{dA_2}{2R_2}, \ldots,\quad d\varphi_n = \frac{dA_n}{2R_n},$$

so kennen wir aus § 47 folgenden Ausdruck des Differentialparameters mittelst konfokaler Variabeln:

$$\text{Diffpar. } V = \frac{1}{\Omega}\left(\Phi_1 \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_1^2} + \Phi_2 \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_2^2} + \cdots + \Phi_n \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_n^2}\right).$$

Wäre nun $(-1)^{i-1}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i^2}$ für $i = 1, 2, 3, \ldots n$ immer einer und derselben ganzen Funktion $(n-2)$-ten oder niedrigeren Grades der einzigen Variabeln A_i proportional, so müsste nach einer in § 45 gemachten Bemerkung Diffpar. V verschwinden. Es sei M_i eine solche ganze Funktion von A_i, und man soll bewirken, dass

$$(-1)^{i-1}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi_i^2} = M_i V$$

wird. Dieses wird erreicht, wenn man

$$V = P_1 P_2 P_3 \ldots P_n, \qquad (-1)^{i-1}\frac{\partial^2 P_i}{\partial \varphi_i^2} = M_i P_i$$

setzt, wo für $i = 1, 2, \ldots n$ immer P_i eine und dieselbe Funktion von A_i bedeutet. Ist diese Funktion P algebraisch und nicht gebrochen, d. h. wird sie für keinen endlichen Wert von A unendlich gross, so vermehrt die Operation $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ ihren Grad um $n-2$; also muss die Funktion M vom $(n-2)$-ten Grade sein. Da die Differentiation nach φ Wurzelgrössen hineinbringt, so sehen wir uns bewogen, von vornherein die Funktion P als Produkt einiger Axen $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}, \ldots$ mit einer ganzen Funktion des Axenquadrates A vorauszusetzen; das Produkt jener Axen sei $\sqrt{K}$, diese Funktion $f(A)$, also $P = \sqrt{K}\,.f(A)$. Ferner sei $R^2 = ABC \ldots = KL$, und η, θ seien die Grade von K und f in Beziehung auf A (was wir unter der Voraussetzung $dA = dB = \cdots$ als einzige Variable ansehen). Werden nun die nach A abgeleiteten Funktionen durch Accente bezeichnet, so verwandelt sich die Bedingung $\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} = MP$ in

$$4\,KLf'' + 2\,(3\,K'L + KL')\,f' + (2\,K''L + K'L')\,f = Mf. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$



Da es auf einen konstanten Faktor in f nicht ankommt, so wollen wir 1 als Koeffizient von A^0 annehmen. Dann wird der Koeffizient der höchsten Potenz A^{n-2} in der Entwicklung von M gleich

$$\begin{aligned} & 4\,\theta\,(\theta-1)+2\,(3\,\eta+n-\eta)\,\theta+2\,\eta\,(\eta-1)+\eta\,(n-\eta) \\ & = 4\,\theta^2+2\,(2\,\eta+n-2)\,\theta+\eta\,(n+\eta-2) \\ & = (2\,\theta+\eta)\,(2\,\theta+\eta+n-2)\,. \end{aligned}$$

Ist m der Grad von P in Beziehung auf die Axe $\sqrt{A}$, so ist $m = 2\,\theta+\eta$, und $m\,(m+n-2)$ der Koeffizient von A^{n-2} in der Entwicklung von M. Es bleiben in den ganzen Funktionen f und M noch $n-2+\theta$ Koeffizienten zu bestimmen übrig. Die Gleichung (1), die wir identisch zu machen haben, ist aber vom $(n-2+\theta)$-ten Grade, und da wir die höchsten Potenzen schon berücksichtigt haben, so bleiben noch $n-2+\theta$ Bedingungen übrig, welche wenigstens ihrer Zahl nach gerade hinreichen, das Verlangte zu leisten. Die nähere Erörterung dieser Aufgabe werden wir erst später in § 52 vornehmen.

Es ist klar, dass die algebraische Funktion P nicht das allgemeine Integral der Gleichung $\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = M V$ ist, weil nur der arbiträre Faktor, den sie haben kann, als Integrationskonstante zählt. Es sei Q ein von P wesentlich verschiedenes Integral derselben Gleichung, so folgt, wenn man aus den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} = M P, \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} = M Q$$

das Polynom M eliminiert,

$$P\,\frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} - Q\,\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} = 0,$$

und durch Integration dieser Gleichung

$$P\,\frac{\partial Q}{\partial \varphi} - Q\,\frac{\partial P}{\partial \varphi} = -1, \qquad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

wo wir -1 für die arbiträre Konstante gesetzt haben, da irgend eine andere Konstante nur der Multiplikation von Q mit einem konstanten Faktor entspricht. Da wir beabsichtigen, Q für ein unendlich wachsendes A verschwinden zu lassen, so setzen wir

$$Q = P \int_A^{\infty} \frac{\partial \varphi}{P^2}, \qquad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

als Integral der Gleichung (2). Für ein unendlich grosses A verschwindet der Einfluss der Unterschiede zwischen den Axenquadraten $A, B, C, \ldots$, und wenn man $\sqrt{A} = a$ setzt und 1 als Koeffizient der höchsten Potenz in P annimmt, so wird

$$Q = \frac{1}{n + 2m - 2} \cdot \frac{1}{a^{n+m-2}}$$

und verschwindet daher für ein unendlich wachsendes a, sobald $n > 2$ ist, was wir fortan voraussetzen wollen.

Es ist jetzt leicht, das allgemeine Integral der vorliegenden Differentialgleichung zweiter Ordnung anzugeben; es ist $\alpha P + \beta Q$, wo α, β die arbiträren Integrationskonstanten bedeuten.

Da nur die erste Gattung quadratischer Kontinuen ein unendliches Wachstum der Axenquadrate verträgt, so können wir Q nur auf solche Kontinua beziehen und daher nur den Zeiger 1 bei dieser Funktion anbringen.

Aus dem gleichen Grunde, warum Diffpar. $(P_1 P_2 \ldots P_n) = 0$ war, ist nun auch Diffpar. $(Q_1 P_2 P_3 \ldots P_n) = 0$, wofern nur die Funktion P für keinen zwischen A_1 und $+\infty$ liegenden Wert von A verschwindet. Man kann nun immer das Axenquadrat A eines Kontinuums $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots = 1$ erster Gattung gross genug annehmen, dass die Funktion P weder für diesen, noch für irgend einen grössern Wert von A verschwindet. Dann ist klar, dass nicht nur, wie sich von selbst versteht, das Produkt $\Pi = P_1 P_2 \ldots P_n$ für keine innerhalb des gegebenen quadratischen Kontinuums liegende, sondern auch das Produkt $\Pi' = Q_1 P_2 P_3 \ldots P_n$ für keine äussere Lösung unendlich gross wird.

Wir wollen nun die zwei Integrale

$$\mathfrak{P} = \int^{n} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial y} + \cdots \right) dx\, dy\, dz \ldots, \left[\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots < 1 \right]$$

$$\mathfrak{Q} = \int^{n} \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi'}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial y} + \cdots \right) dx\, dy\, dz \ldots, \left[\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots > 1 \right]$$

näher betrachten. Ersetzt man für ein sehr grosses A das Element $dx\, dy\, dz \ldots$ der Totalität durch $r^{n-1} dr\, d\sigma$, wo wir auch r uns als sehr gross denken, so sind die Differentialkoeffizienten von $\frac{1}{r^{n-2}}$ von keiner niedrigern Ordnung des Unendlichkleinen als $\frac{1}{r^{n-1}}$, und da Q, wie wir oben gesehen haben, von der Ordnung $\frac{1}{r^{n+m-2}}$ ist, so sind auch Π' und dessen Differentialkoeffizienten wenigstens von keiner niedrigern Ordnung; daher ist endlich $\mathfrak{Q}$ wenigstens von keiner niedrigern Ordnung als $\int^{\infty} \frac{dr}{r^{n+m-2}}$, also für ein

unendlich wachsendes r von einer verschwindenden Ordnung, sobald $n+m>3$ ist. Für $m=0$ ist $P=1$, und (für ein sehr grosses A) nahezu $Q=\frac{1}{n-2}\frac{1}{r^{n-2}}=\Pi'$, $\mathfrak{Q}=\frac{1}{r^{n-2}}\int d\sigma$. Also hat überhaupt für $n>2$ das Integral $\mathfrak{Q}$ einen endlichen Wert, wenn nur A gross genug ist, dass P_1 für $A_1 \overline{\gtrless} A$ nicht verschwinden kann; hiebei ist freilich der Einfluss, den das Hineinfallen der Gegend, wo $r=0$ ist, in die Totalität des Integrals auf dessen Wert haben kann, nicht berücksichtigt. Umschreibt man mit dem unendlich kleinen Radius ϱ um das Zentrum $(a, b, \ldots)$ eine Polysphäre, so kann man innerhalb derselben $\Pi, \Pi', \frac{\partial \Pi}{\partial x}$, etc. als konstant ansehen. Dann ist z. B.

$$\int^{n} \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x}\, dx\, dy\, dz \ldots [x^2+y^2+\cdots<\varrho^2] = \int^{n-1} \left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) dy\, dz \cdots = 0,$$

weil $\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)=\frac{1}{\varrho^{n-2}}-\frac{1}{\varrho^{n-2}}=0$ ist, oder auch, wenn man will, weil das vorliegende Integral $=\varrho\int \lambda\, d\sigma=0$ ist. Wenn wir also auch die um die Lösung $(a, b, \ldots)$ mit dem unendlich kleinen Radius ϱ beschriebenen Polysphäre, mag sie in die Totalität des Integrals $\mathfrak{P}$ oder die des $\mathfrak{Q}$ hineinfallen, davon ausschliessen, so wird dadurch der Wert des betreffenden Integrals nicht geändert. Wir können nun diese Integrale auf zwei Arten verwandeln.

1. Es ist

$$\int \frac{\partial \Pi}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x}\, dx = \left(\frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial \Pi}{\partial x}\right) - \int \frac{1}{r^{n-2}} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}\, dx,$$

wo die Klammern den Unterschied zwischen dem End- und Anfangswert anzeigen. Da nun das $(n-1)$-fache Element $dy\, dz \ldots$ durch $\lambda\, d\omega$ ersetzt werden kann, wenn es einer Stelle des gegebenen quadratischen Kontinuums (A) entspricht, wo $d\omega$ das Element dieses Grenzkontinuums, und $\lambda, \mu, \ldots$ die Richtungskosinus der entsprechenden Normale bezeichnen, so ist, wenn abkürzend $D=\lambda \frac{\partial}{\partial x}+\mu \frac{\partial}{\partial y}+\cdots$ gesetzt, und die Gleichungen: Diffpar. $\Pi=0$, Diffpar. $\Pi'=0$, berücksichtigt werden,

$$\mathfrak{P}=\int \frac{D\Pi}{r^{n-2}}\, d\omega, \qquad \mathfrak{Q}=-\int \frac{D\Pi'}{r^{n-2}}\, d\omega.$$

Im letzten Ausdruck ist das auf die unendlich weit entfernte Grenze bezügliche mit positivem Vorzeichen zu versehende Integral von derselben Gestalt weggelassen worden. Dann für $m>0$ ist $D\Pi'$ wenigstens von derselben Ordnung mit Π' oder Q, also von der Ordnung $\frac{1}{r^{n+m-3}}$, und da $dw=r^{n-1}\, d\sigma$ gesetzt werden kann, so ist das

fragliche Integral wenigstens von der Ordnung $\frac{1}{r^{n+m-3}}$ und verschwindet, wenn $n \geqq 3$ ist. Für $m = 0$ ist Π' von der Ordnung $\frac{1}{r^{n-2}}$, daher $D\Pi'$ von der Ordnung $\frac{1}{r^{n-1}}$, also das fragliche Integral von der Ordnung $\frac{1}{r^{n-2}}$ und verschwindet mithin ebenfalls für $n \geqq 3$.

Die Operation D bezeichnet die Variation einer Funktion längs der Normale des Elements $d\omega$, dividiert durch das betreffende Element der Normale. Sie ist daher gleich $2p\frac{\partial}{\partial A}$, wo p den Abstand des Zentrums vom linearen Tangentialkontinuum in $d\omega$ bezeichnet, und von den Axenquadraten $A_2, A_3, \ldots A_n$ der übrigen konfokalen Kontinuen unabhängig; also $D\Pi = (DP) . P_2 P_3 \ldots P_n$ und $D\Pi' = (DQ) . P_2 P_3 \ldots P_n$. Ferner ist $p = R : \sqrt{(A - A_2)(A - A_3) \ldots (A - A_n)}$; folglich, wenn wir abkürzend $q = \sqrt{(A - A_2)(A - A_3) \ldots (A - A_n)}$ setzen, $D = \frac{1}{q}\frac{\partial}{\partial \varphi}$. Da nun in den vorliegenden Integralen A als konstant gilt, so haben wir

$$\mathfrak{P} = \frac{\partial P}{\partial \varphi}\int \frac{P_2 P_3 \ldots P_n}{q r^{n-2}} d\omega, \qquad \mathfrak{Q} = -\frac{\partial Q}{\partial \varphi}\int \frac{P_2 P_3 \ldots P_n}{q r^{n-2}} d\omega,$$

und vermöge der Gleichung (2)

$$P\mathfrak{Q} + Q\mathfrak{P} = \int \frac{P_2 P_3 \ldots P_n}{q r^{n-2}} d\omega. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Man kann $d\omega$ durch $\frac{dy\,dz \ldots}{\lambda} = \frac{A}{px} dy\,dz \cdots = \frac{Aq}{Rx} dy\,dz \ldots$ ersetzen. Verwandelt man durch $x = \sqrt{A} . x'$, $y = \sqrt{B} . y'$, etc. das quadratische Kontinuum in ein polysphärisches vom Radius 1, dessen Element wir gewöhnlich mit $d\sigma$ bezeichnen, so wird $dy'\,dz' \cdots = x' d\sigma$, und $\frac{d\omega}{q} = d\sigma$.

2. Die andere Verwandlung ist

$$\int \frac{\partial \Pi}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x} dx = \left(\Pi \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x}\right) - \int \Pi \frac{\partial^2 \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x^2} dx.$$

Bevor wir nun diese Gleichung mit $dy\,dz \ldots$ multiplizieren und in Beziehung auf $x, y, z, \ldots$ summieren, wollen wir die Folgen der Ausschliessung der Polysphäre ϱ um $(a, b, \ldots)$ beurteilen. Im letzten Gliede rechts ist immer $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \cdots\right)\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) = 0$, so lange r nicht verschwindet. Wenn also die Polysphäre ϱ ausgeschlossen wird, so ist auf der rechten Seite in der Summe das zweite Glied wegzulassen. Hinsichtlich des ersten Gliedes rechts kann die durch Wegnahme der Polysphäre ϱ entstandene Lücke durch

$$\Pi\int D\,\frac{1}{r^{n-2}}\cdot\varrho^{n-1}\,d\sigma=\Pi\int\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\frac{1}{\varrho^{n-2}}\right)\cdot\varrho^{n-1}\,d\sigma=-(n-2)\,\Pi\int d\sigma=-\frac{4\,\pi^{\frac{n}{2}}\,\Pi}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}$$

ausgedrückt werden, wenn für Π der der Lösung $(a, b, \ldots)$ entsprechende Wert gesetzt wird. Steht Π' an der Stelle von Π, so ist das der unendlich weit entfernten Grenze entsprechende Integral von der Ordnung $\int \Pi'\,d\sigma$, verschwindet also. Durch das Gesagte wird die Richtigkeit der folgenden Gleichungen hinreichend begründet sein.

Wenn $\frac{a^2}{A}+\frac{b^2}{B}+\cdots<1$ ist, so ist

$$\mathfrak{P}=P\int\frac{P_2\,P_3\ldots P_n}{q}\,\frac{\partial\,\frac{1}{r^{n-2}}}{\partial\varphi}\,d\omega+\frac{4\,\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}\,[P_1\,P_2\ldots P_n],$$

$$\mathfrak{Q}=-\,Q\int\frac{P_2\,P_3\ldots P_n}{q}\,\frac{\partial\,\frac{1}{r^{n-2}}}{\partial\varphi}\,d\omega;$$

wenn dagegen $\frac{a^2}{A}+\frac{b^2}{B}+\cdots>1$ ist, so ist

$$\mathfrak{P}=P\int\frac{P_2\,P_3\ldots P_n}{q}\,\frac{\partial\,\frac{1}{r^{n-2}}}{\partial\varphi}\,d\omega,$$

$$\mathfrak{Q}=-\,Q\int\frac{P_2\,P_3\ldots P_n}{q}\,\frac{\partial\,\frac{1}{r^{n-2}}}{\partial\varphi}\,d\omega+\frac{4\,\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}\,[Q_1\,P_2\,P_3\ldots P_n],$$

wo die in Klammern geschlossenen Produkte sich auf die Lösung $(a, b, \ldots)$ beziehen. Diese Gleichungen geben im ersten Falle

$$P\,\mathfrak{Q}+Q\,\mathfrak{P}=\frac{4\,\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}\,Q\,[P_1\,P_2\,P_3\ldots P_n],$$

im zweiten

$$=\frac{4\,\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}\,P\,[Q_1\,P_2\,P_3\ldots P_n].$$

Hält man damit die Formel (4) zusammen, so findet man

$$\int \frac{P_2 P_3 \ldots P_n}{r^{n-2}} \frac{d\omega}{q} = \frac{4\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} Q\,[P_1 P_2 P_3 \ldots P_n] \text{ oder } = \frac{4\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} P\,[Q_1 P_2 P_3 \ldots P_n], \quad (5)$$

je nachdem die Lösung $(a, b, \ldots)$ innerhalb oder ausserhalb des quadratischen Kontinuums (A) liegt. Beide Formeln fallen zusammen, indem $P_1 = P$, $Q_1 = Q$ wird, wenn die Lösung dem Kontinuum selbst angehört.

Die linke Seite dieser Formel (5) stellt das Potential einer auf dem Kontinuum (A) verteilten Masse dar, wenn überall die Dichtigkeit $k = P_2 P_3 \ldots P_n : q$ ist.

Sind P, P' zwei sich nicht nur durch einen konstanten Faktor unterscheidende Funktionen, welche die im Eingang dieses § erwähnten Bedingungen erfüllen, und wendet man das soeben gebrauchte Verfahren auf das Integral

$$\int^n \left(\frac{\partial\,.\,P_1 P_2 \ldots P_n}{\partial x} \cdot \frac{\partial\,.\,P'_1 P'_2 \ldots P'_n}{\partial x} + \text{etc.}\right) dx\, dy\, dz \ldots \quad \left[\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots < 1\right]$$

an, so findet man

$$\left(P \frac{\partial P'}{\partial \varphi} - P' \frac{\partial P}{\partial \varphi}\right) \int P_2 P_3 \ldots P_n \,.\, P'_2 P'_3 \ldots P'_n \frac{d\omega}{q} = 0.$$

Der vorgesetzte Faktor kann nicht verschwinden, wenn nicht $P' : P$ konstant ist; daher muss

$$\int P_2 P_3 \ldots P_n \,.\, P'_2 P'_3 \ldots P'_n \frac{d\omega}{q} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

sein. — Da auch $P' = 1$ zu dieser Klasse der Funktionen gehört, so ist für eine Funktion P, deren Grad die Null übersteigt,

$$\int P_2 P_3 \ldots P_n \frac{d\omega}{q} = 0 \quad \ldots \quad (7), \qquad \text{dagegen} \int \frac{d\omega}{q} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Hätte eine Funktion P imaginäre Koeffizienten, so gäbe es auch eine Funktion P' mit den konjugierten Koeffizienten; und wenn $P_2 P_3 \ldots P_n = u + v\sqrt{-1}$ gesetzt würde, wo u, v reell sein sollen, so wäre $P'_2 P'_3 \ldots P'_n = u - v\sqrt{-1}$, und man hätte $\int \frac{u^2 + v^2}{q} d\omega = 0$. Diess ist nicht möglich, weil q immer positiv ist. Die Funktionen P sind also alle reell.

Die obigen Ausdrücke für das Potential eines quadratischen Kontinuums (A) sind unter der Voraussetzung bewiesen worden, dass P_1 für $A_1 \gtreqless A$ nicht verschwinde. Könnte

P_1 für ein kleineres A_1, das immer noch einem Kontinuum erster Gattung angehörte, verschwinden, so denke man sich das quadratische Kontinuum, welches dieses zunächst umschliesst; für dieses müsste dann Q einen sehr grossen Wert haben; eine innere Lösung $(a, b, \ldots)$ wird immer anzugeben sein, für welche keine der Funktionen P_1, P_2, $\ldots P_n$ einen sehr kleinen Wert annimmt, so dass das Produkt $Q P_1 P_2 \ldots P_n$ immer noch sehr gross wird; dann haben wir aber für das Potential einen sehr grossen Wert, was nicht sein kann, da die Dichtigkeit auf dem ganzen quadratischen Kontinuum nirgends sehr gross werden kann. Wir schliessen hieraus, dass die Funktion P_1 nie verschwindet, dass also Q_1 nie unendlich gross wird. Die Formeln (5) sind daher allgemein gültig.

§ 51. Anwendung des Vorigen auf die Bestimmung des Potentials der von einem quadratischen Kontinuum erster Gattung umschlossenen homogenen Totalität.

Die Funktion P vom niedrigsten Grade ist $P = 1$; für diese geben die Gleichungen (5) und (3) des vorigen §:

$$\int \frac{1}{r^{n-2}} \frac{d\omega}{q} = \frac{4\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} \int^{\infty} \frac{dA_1}{2R_1},$$

wo rechts als untere Grenze des Integrals $A_1 = A$ oder der der Lösung $(a, b, \ldots)$ entsprechende Wert von A_1 zu nehmen ist, je nachdem diese Lösung innerhalb oder ausserhalb des quadratischen Kontinuums (A) liegt.

Bedeutet h eine unendlich kleine Zahl, und werden alle linearen Dimensionen des gegebenen quadratischen Kontinuums (A) im Verhältnisse $1 + h$ vergrössert, so dass ein mit jenem konzentrisches und ähnlich liegendes Kontinuum entsteht, so ist ph die Dicke der zwischen beiden Kontinuen enthaltenen Schicht, und wenn man diese sich homogen und von der Dichtigkeit 1 denkt, $h \,.\, p\, d\omega = hR \cdot \frac{d\omega}{q}$ das Massenelement. Das Potential dieser Schicht ist also

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} Rh \cdot \int^{\infty} \frac{dA_1}{R_1}$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} h \sqrt{ABC \ldots J} \,.\, \int^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(A+u)(B+u)\ldots(J+u)}},$$

wo das Integral entweder bei dem **positiven** Werte von u, welcher der Gleichung $\frac{a^2}{A+u} + \frac{b^2}{B+u} + \cdots = 1$ genügt, oder, wenn es keinen solchen giebt, bei $u = 0$ anfängt.

Verkleinern wir die linearen Dimensionen des gegebenen quadratischen Kontinuums in den Verhältnissen θ und $\theta + d\theta$ und suchen das Potential dV der zwischen den entsprechenden Kontinuen enthaltenen Schicht, so ist $h = \frac{d\theta}{\theta}$, die Axenquadrate $A, B, \ldots$ und die Variable u sind durch $\theta^2 A$, $\theta^2 B, \ldots$, $\theta^2 u$ zu ersetzen, und wir bekommen

$$dV = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}\,\theta\,d\theta\,.\sqrt{ABC\ldots J}\int^{\infty}\frac{du}{\sqrt{(A+u)(B+u)\ldots(J+u)}},$$

wo als untere Integrationsgrenze entweder der positive Wert h von u, für welchen $\frac{a^2}{A+u} + \frac{b^2}{B+u} + \cdots = \theta^2$ ist, oder, wenn kein solcher existiert, $u = 0$ zu nehmen ist. Ist $\theta = 0$, so muss h positiv unendlich gross sein. Wie θ wächst, wird h immer kleiner; endlich erreicht θ einen Wert ε, für den h Null wird. In diesem Intervall ist das Integral $\int_h^{\infty}\frac{du}{\sqrt{(A+u)(B+u)\ldots}} = \Theta$ eine Funktion von θ; ihr Wert für $\theta = \varepsilon$ oder $h = 0$ sei E. So wie aber θ über ε hinaus wächst, muss man dem Integral den konstanten Wert E geben. Es ist aber

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\theta} = \frac{\partial\Theta}{\partial h}\,\frac{\partial h}{\partial\theta} = -\,\frac{\frac{\partial h}{\partial\theta}}{\sqrt{(A+h)(B+h)\ldots}};$$

daher

$$\int_{\theta=0}^{\theta<\varepsilon}\theta\,\Theta\,d\theta = \frac{1}{2}\,\theta^2\,\Theta + \frac{1}{2}\int_{\theta'=0}^{\theta'=\theta}\frac{\theta'^2\,\frac{\partial h'}{\partial\theta'}\,d\theta'}{\sqrt{(A+h')(B+h')\ldots}} = \frac{1}{2}\,\theta^2\,\Theta - \frac{1}{2}\int_{h'=h}^{h'=\infty}\frac{\theta'^2\,dh'}{\sqrt{(A+h')(B+h')\ldots}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{u=h}^{u=\infty}\frac{\theta^2 - \frac{a^2}{A+u} - \frac{b^2}{B+u} - \cdots}{\sqrt{(A+u)(B+u)\ldots\ldots}}\,du.$$

Ist die obere Integrationsgrenze ein Wert von θ, welcher ε übertrifft, so hat man

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\varepsilon}\Theta\,\theta\,d\theta + \int_{\theta=\varepsilon}E\,\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{u=0}^{u=\infty}\frac{\varepsilon^2 - \Sigma\frac{a^2}{A+u}}{\sqrt{\Pi(A+u)}}\,du + \frac{\theta^2-\varepsilon^2}{2}\int_{u=0}^{u=\infty}\frac{du}{\sqrt{\Pi(A+u)}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{u=0}^{u=\infty}\frac{\theta^2 - \Sigma\frac{a^2}{A+u}}{\sqrt{\Pi(A+u)}}\,du.$$

Erstreckt sich die Integration von $\theta = 0$ bis $\theta = 1$, so hat man endlich

$$V = \int^{n} \frac{dx\, dy \ldots dw}{\left[(x-a)^2 + (y-b)^2 + \cdots + (w-i)^2\right]^{\frac{n}{2}-1}} \qquad \left[\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots + \frac{w^2}{J} < 1\right]$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)} \sqrt{ABC \ldots J} \int^{\infty} \frac{1 - \left(\frac{a^2}{A+u} + \frac{b^2}{B+u} + \cdots + \frac{i^2}{J+u}\right)}{\sqrt{(A+u)(B+u) \ldots (J+u)}}\, du,$$

wo als untere Integrationsgrenze der Wert von u, für welchen der Zähler des Bruchs verschwindet, wenn jener positiv ist, sonst aber der Nullwert zu nehmen ist. — Dieses Resultat stimmt mit § 49 (4) überein.

§ 52. *Ueber die algebraischen Lösungen der Gleichung* $\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} = MP$.

Es scheint etwas schwer, mit Sicherheit die Zahl der verschiedenen Formen der ganzen Funktion f anzugeben, welche der identischen Gleichung (1) in § 50 genügt, wenn ihr Grad θ und die η Axenquadrate, aus denen das Produkt K besteht, gegeben sind. Da die Koeffizienten der höchsten Potenzen in f und M bekannt sind, so gehen, wie wir schon gesehen haben, aus (1) nur $\theta + n - 2$ algebraische Gleichungen zweiten Grades zwischen den an Zahl gleichkommenden übrigen Koeffizienten hervor. Das System derselben hat also höchstens $2^{\theta + n - 2}$ Lösungen. Da aber die Gleichungen eine sehr spezielle Beschaffenheit haben, so kann man wohl vermuten, dass diese Zahl zu hoch sei, und braucht nur für die ersten ganzen Werte von θ, η die Rechnung auszuführen, um diese Vermutung bestätigt zu finden.

Um dem wahren Sachverhalt näher auf die Spur zu kommen, wollen wir die unbekannte Funktion M dadurch eliminieren, dass wir für die Variable nach und nach alle ihre Werte substituieren, durch welche $f = 0$ wird und deren Zahl offenbar θ ist. Sie treten als die Unbekannten des Systems an die Stelle der an Zahl gleichen unbekannten Koeffizienten der Funktion f; und da die Zahl der Gleichungen, die wir so erhalten, ebenfalls θ ist, so reichen sie zur Bestimmung der Funktion f gerade hin, und dann ergiebt sich die andere unbekannte Funktion M aus der ursprünglichen Gleichung (1) von selbst.

Es sei also $dA = dB = dC = \cdots = du$, $f(u) = (u-\alpha)(u-\beta) \ldots (u-\zeta)$, $R^2 = KL = H(u)$, $3K'L + KL' = 4J(u)$, wo H, J resp. als Zeichen von ganzen Funktionen n-ten und $(n-1)$-ten Grades gelten mögen. Dann ist

$$H\alpha \,.\, f''\alpha + 2J\alpha \,.\, f'\alpha = 0, \text{ etc. } (\theta \text{ Gleichungen}). \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

Diese Gleichungen sind in Beziehung auf die Unbekannten $\alpha, \beta, \dots \zeta$ vom Grade $\theta + n - 2$. Wenn wir aber von der ersten Gleichung des Systems nach und nach alle übrigen subtrahieren, so können wir resp. mit $\alpha - \beta$, $\alpha - \gamma, \dots$, $\alpha - \zeta$ dividieren, wodurch der Grad um eine Einheit hinuntergeht; subtrahieren wir dann wieder von der ersten dieser Gleichungen nach und nach alle übrigen, so können wir mit $\beta - \gamma$, $\beta - \delta, \dots$ dividieren, u. s. f.; und zuletzt haben wir eine Reihe von θ Gleichungen, deren Grade resp. $\theta + n - 2$, $\theta + n - 3, \dots n$, $n - 1$ sind. Die Endgleichung für eine einzige Unbekannte ist also höchstens vom Grade $(\theta + n - 2)(\theta + n - 3) \dots n(n-1)$. Da aber hiebei alle durch Permutation einer und derselben Gruppe von Werten der Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma \dots$ entstandenen Lösungen des Systems als unter sich verschiedene aufgezählt sind, obgleich sie nur eine und dieselbe Funktion f liefern, so reduziert sich die Zahl der Funktionen f, welche dem Systeme (1) genügen, auf höchstens $\binom{n + \theta - 2}{\theta}$. Dass dieses wirklich die wahre Zahl sei, geht zwar aus dieser Betrachtung nicht mit Sicherheit hervor; aber die für bestimmte Werte von η und θ angestellten Versuche bringen es zur höchsten Wahrscheinlichkeit.

Um die Form der Gleichungen, welche das soeben beschriebene Verfahren liefert, zu erkennen, setzen wir zuerst $fu = (u - \alpha)\varphi u$. Dadurch verwandelt sich die erste Gleichung des Systems (9) in

$$H\alpha \,.\, \varphi'\alpha + J\alpha \,.\, \varphi\alpha = 0.$$

Da $\frac{\varphi'\alpha}{\varphi\alpha} = \frac{1}{\alpha - \beta} + \frac{1}{\alpha - \gamma} + \dots + \frac{1}{\alpha - \zeta}$ und $\varphi\beta = 0$, $\varphi\gamma = 0$, etc. ist, so kann diese erste Gleichung (9) auch so geschrieben werden:

$$\Sigma \frac{H\alpha \,.\, \varphi'\alpha - H\beta \,.\, \varphi\beta}{\alpha - \beta} + \Sigma J\alpha \,.\, \varphi\alpha = 0,$$

wo die letzte Summe sich auf alle θ unbekannten Wurzeln der Gleichung $f = 0$ und die erste auf deren Kombinationen zu zweien erstreckt. Ist nun

$$fu = u^{\theta} + k_1 u^{\theta - 1} + k_2 u^{\theta - 2} + \dots + k_{\theta - 1} u + k_{\theta},$$

so ist

$$\varphi u = u^{\theta - 1} + \left.\begin{matrix} \alpha \\ + k_1 \end{matrix}\right| u^{\theta - 2} + \left.\begin{matrix} \alpha^2 \\ + k_1 \alpha \\ + k_2 \end{matrix}\right| u^{\theta - 3} + \dots + \begin{matrix} \alpha^{\theta - 1} \\ + k_1 \alpha^{\theta - 2} \\ + k_2 \alpha^{\theta - 3} \\ \dots\dots \\ + k_{\theta - 1} \end{matrix} \;;$$

daher wird, wenn man abkürzend

$$S_i = \Sigma \frac{\alpha^i H\alpha - \beta^i H\beta}{\alpha - \beta} + \Sigma \alpha^i J\alpha$$

setzt, die erste Gleichung (9)

$$S_{\theta-1} + (\alpha + k_1) S_{\theta-2} + (\alpha^2 + k_1\alpha + k_2) S_{\theta-3} + \cdots + (\alpha^{\theta-1} + k_1\alpha^{\theta-2} + \cdots + k_{\theta-1}) S_0 = 0,$$

und die übrigen Gleichungen des Systems (9) entstehen aus dieser, indem man nach und nach α durch $\beta, \gamma, \ldots \zeta$ ersetzt. Das System (9) ist also zu einem Systeme von θ linearen Gleichungen in Beziehung auf die $\theta - 1$ unbekannten Verhältnisse der Grössen S geworden. Wenn also diese Grössen nicht verschwinden, so muss die Determinante ihrer Koeffizienten es thun. Diese reduziert sich aber auf die Determinante $\Sigma \pm \alpha^{\theta-1}\beta^{\theta-2}\gamma^{\theta-3}\ldots\varepsilon^1\zeta^0$ $= \Pi(\alpha - \beta)$. Man hat also nur die Wahl, entweder alle Grössen S als verschwindend, oder in der Gleichung $f = 0$ gleiche Wurzeln anzunehmen. Das letztere als etwas Spezielles setzen wir einstweilen bei Seite und entscheiden uns für das Erstere, dem allgemeinen Fall Entsprechende. Wir haben dann die θ Gleichungen $S_0, S_1, S_2, \ldots S_{\theta-1} = 0$; und wenn diese Statt haben, so ist auch das System (9) erfüllt. Man bemerke, dass diese Gleichungen, deren Grade resp. $n-1, n, n+1, \ldots, n+\theta-2$ sind, in Beziehung alle Wurzeln $\alpha, \beta, \ldots \zeta$ symmetrisch sind und daher rational und ganz mittelst der Koeffizienten $k_1, k_2, \ldots k_\theta$ ausgedrückt werden können.

Das Produkt K kann auf $\binom{n}{\eta}$ verschiedene Arten aus den Axenquadraten $A, B, \ldots$ zusammengesetzt werden. Wenn also wiederum der Grad der ganzen und rationalen Funktion PP in Beziehung auf A mit $m = 2\theta + \eta$ bezeichnet wird, so ist

$$\Sigma \binom{n+\theta-2}{\theta}\binom{n}{m-2\theta} = \Sigma(-1)^\theta \binom{-n+1}{\theta}\binom{n}{m-2\theta}$$

die Zahl der einem gegebenen Grade entsprechenden Funktionen P. Sie ist also der Koeffizient von x^m in der Entwicklung von $(1 - x^2)^{-n+1}(1 + x)^n$ nach steigenden Potenzen von x. Dieser Ausdruck reduziert sich auf $(1 + x)(1 - x)^{-n+1}$. Die fragliche Zahl ist also gleich

$$\binom{-n+1}{m}(-1)^m + \binom{-n+1}{m-1}(-1)^{m-1} = \binom{m+n-2}{n-2} + \binom{m+n-3}{n-2}.$$

§ 53. *Darstellung gewisser arbiträrer Funktionen von $n-1$ unabhängigen Variabeln.*

Es sei φ eine beliebige Funktion, deren Werte für alle auf dem quadratischen Kontinuum $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots = 1$ befindlichen Lösungen bekannt sind, also, wenn man will,

eine bekannte Funktion der $n-1$ konfokalen Variabeln $A_2, A_3, \ldots A_n$. Man bestimme nach dem im vorigen § beschriebenen Verfahren nach und nach für $m = 0, 1, 2, 3 \ldots$ alle algebraischen Funktionen P, welche der Gleichung $\frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} = MP$ genügen. Denkt man sich φ von der Form $\Sigma k P_2 P_3 \ldots P_n$, wo k einen konstanten Koeffizienten bezeichnet, und die Summe sich über alle Formen der Funktion P erstreckt, wobei wir ferner annehmen, dass für $m = 0, 1, 2, \ldots.$ die Koeffizienten k eine abnehmende Reihe bilden, welche schneller fällt als eine geometrische: so kann man jeden Koeffizienten k durch ein über das ganze quadratische Kontinuum (A) sich erstreckendes Integral ausdrücken. Vermöge der Gleichung (6) in § 50 ist nämlich

$$\int \varphi \cdot P_2 P_3 \ldots P_n \frac{d\omega}{q} = k \int (P_2 P_3 \ldots P_n)^2 \frac{d\omega}{q}.$$

Da das Integral rechts lauter positive Elemente enthält, in denjenigen links hingegen das Vorzeichen von $P_2 P_3 \ldots P_n$ desto häufiger wechseln wird, je höher der Grad m von P in Beziehung auf $\sqrt{A}$ ist, so wird im allgemeinen höchst wahrscheinlich der häufigste Fall der sein, dass das Integral links ungefähr nach geometrischer Progression immer kleiner wird, je höher m steigt. Ist k_0 das konstante Glied der angenommenen Entwicklung von φ, so hat man

$$\int \varphi \frac{d\omega}{q} = k_0 \int \frac{d\omega}{q} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot k_0.$$

Ich halte es für sehr wahrscheinlich, dass jede Funktion, deren Werte überall auf dem quadratischen Kontinuum (A) nach Belieben gegeben sind, unter die Form $\Sigma k P_2 P_3 \ldots P_n$ gebracht werden kann; allein die Schwierigkeit des Beweises erscheint mir fast unübersteiglich.

§ 54. Reduktion einiger vielfachen Integrale auf einfache.

Bei der Bestimmung des Potentials der von einem quadratischen Kontinuum umschlossenen homogenen Totalität in § 49 kam die Reduktion eines gewissen $(n-1)$-fachen Integrals auf ein einfaches vor. Hier sollen nun einige vielfache Integrale von allgemeinerer Beschaffenheit, welche jenes als speziellen Fall enthalten, reduziert werden.

I. Aus der Theorie der Eulerschen Integrale folgt

$$\underset{\substack{(x>0,\ y>0, \ldots w>0 \\ x+y+z+\cdots+w=1)}}{\int^{n-1}} x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\gamma-1} \ldots w^{\varepsilon-1}\, dy\, dz \ldots dw = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma)\ldots\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\varepsilon)}.$$

Um die, wenn ich nicht irre, von **Catalan** gegebene Formel zu beweisen, kann man mit $\int_0^\infty e^{-(x+y+\cdots+w)u}\, u^{\alpha+\beta+\cdots+\varepsilon-1}\, du = \Gamma(\alpha+\beta+\cdots+\varepsilon)$ multiplizieren, $ux, uy, \ldots uw$ in $x, y, \ldots w$ umsetzen, und endlich, da $x+y+\cdots+w=u$ sein muss, du durch dx ersetzen; das Integral zerfällt dann in ein Produkt von n einfachen Integralen.

Setzen wir in der vorliegenden Formel $x=\lambda^2$, $y=\mu^2, \ldots w=\bar{\omega}^2$, so stellt die Bedingung $\lambda^2+\mu^2+\cdots+\omega^2=1$ ein polysphärisches Kontinuum dar; das $(n-1)$-fache Element $d\mu\, d\nu \ldots d\bar{\omega}$ ist daher eine Projektion des Elements $d\sigma$ dieses Kontinuums und hat den Wert $\lambda\, d\sigma$. Wir bekommen so:

$$\int \lambda^{2\alpha-1}\mu^{2\beta-1}\nu^{2\gamma-1}\ldots\bar{\omega}^{2\varepsilon-1}\,d\sigma = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\ldots.\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\alpha+\beta+\cdots+\varepsilon)} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$\begin{pmatrix}\lambda>0,\ \mu>0,\ldots\bar{\omega}>0,\\ \lambda^2+\mu^2+\cdots+\bar{\omega}^2=1\end{pmatrix}$$

II. Wird der Kürze wegen $\varDelta = \frac{\lambda^2}{A}+\frac{\mu^2}{B}+\cdots+\frac{\bar{\omega}^2}{J}$ gesetzt und bedeutet ψ eine beliebige Funktion von n Variabeln, so soll das Integral

$$\Psi = \int \psi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\varDelta}}, \frac{\mu}{\sqrt{\varDelta}}, \cdots \frac{\bar{\omega}}{\sqrt{\varDelta}}\right)\frac{d\sigma}{\varDelta^{\frac{n}{2}}}$$

verwandelt werden. Setzen wir für diesen Zweck $\varrho^2\varDelta=1$, so kann das Integral auch unter der Form

$$\Psi = \int\left(\int_0^{\varrho}\frac{1}{r^{n-1}}\,\frac{\partial\,.\,r^n\psi(r\lambda, r\mu,\ldots r\bar{\omega})}{\partial r}\,r^{n-1}\,dr\right)d\sigma$$
$$= \int^{(n)}\frac{1}{r^{n-1}}\,\frac{\partial\,.\,r^n\psi(r\lambda, r\mu,\ldots r\omega)}{\partial r}\,dx\,dy\,dz\ldots dw$$
$$\begin{pmatrix}r^2=x^2+y^2+\cdots+w^2,\ x=r\lambda,\ \text{etc.}\\ \frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\cdots+\frac{w^2}{J}<1\end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Bedeuten $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ die ersten abgeleiteten Funktionen von ψ, so ist

$$\frac{1}{r^{n-1}}\,\frac{\partial\,.\,r^n\psi}{\partial r} = n\psi + x\psi_1 + y\psi_2 + \cdots + w\psi_n,$$

und, wenn $x=x'\sqrt{A}$, $y=y'\sqrt{B}, \ldots$, $x'=r'\lambda'$, $y'=r'\mu', \ldots$ angenommen wird,

$$\frac{1}{r^{n-1}}\,\frac{\partial\,.\,r^n\psi}{\partial r} = n\psi + r'\left(\lambda'\sqrt{A}\,.\,\psi_1+\mu'\sqrt{B}\,.\,\psi_2+\cdots\right) = \frac{1}{r'^{n-1}}\,\frac{\partial\,.\,r'^n\psi(r'\lambda'\sqrt{A}, r'\mu'\sqrt{B},\ldots)}{\partial r'}.$$

Man erhält also

$$\Psi = \sqrt{ABC\ldots J} \int^{n} \frac{1}{r'^{n-1}} \frac{\partial \,.\, r'^{n} \psi (r'\lambda' \sqrt{A},\, r'\mu' \sqrt{B}, \ldots)}{\partial r'} \, dx'\, dy' \ldots dw',$$

$$(r'^{2} = x'^{2} + y'^{2} + \cdots + w'^{2} < 1)$$

oder, mit Weglassung der Accente und Ersetzung von $dx\,dy\,dz\ldots dw$ durch $r^{n-1} dr\, d\sigma$,

$$\Psi = \sqrt{ABC\ldots J} \int \left(\int_{0}^{1} \frac{\partial \,.\, r^{n} \psi (r\lambda \sqrt{A}, \ldots)}{\partial r} \, dr \right) d\sigma;$$

also endlich

$$\int \psi \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\varDelta}}, \frac{\mu}{\sqrt{\varDelta}}, \cdots \frac{\bar{\omega}}{\sqrt{\varDelta}} \right) \frac{d\sigma}{\varDelta^{\frac{n}{2}}} = \sqrt{AB\ldots J} \int \psi (\lambda \sqrt{A},\, \mu \sqrt{B}, \ldots \bar{\omega} \sqrt{J})\, d\sigma, \quad . \quad (2)$$

wo $\varDelta = \frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \cdots + \frac{\bar{\omega}^2}{J}$, und beide Integrale sich nur über den Teil des polysphärischen Kontinuums $\lambda^2 + \mu^2 + \cdots + \bar{\omega}^2 = 1$ erstrecken, wo sämtliche Variabeln λ, $\mu, \ldots \bar{\omega}$ positiv sind.

Setzt man $\psi = 1$ und lässt $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \ldots$ in $1 + \frac{u}{A}, 1 + \frac{u}{B}, \ldots$ übergehen, so verwandelt sich (2) in

$$\int \frac{d\sigma}{(1 + u\varDelta)^{\frac{n}{2}}} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{u}{A}\right)\left(1 + \frac{u}{B}\right)\cdots\left(1 + \frac{u}{J}\right)}},$$

wenn das Integral links sich über das ganze polysphärische Kontinuum erstreckt. Je nachdem man auf beiden Seiten nach den steigenden oder nach den fallenden Potenzen von u entwickelt, enthält man finite Ausdrücke für $\int \varDelta\, d\sigma$, $\int \varDelta^2 d\sigma$, $\int \varDelta^3 d\sigma$, etc., oder für $\int \frac{d\sigma}{\varDelta^{\frac{n}{2}}}$, $\int \frac{d\sigma}{\varDelta^{\frac{n}{2}+1}}$, $\int \frac{d\sigma}{\varDelta^{\frac{n}{2}+2}}$, etc. Den Wert für $\int \frac{d\sigma}{\varDelta^{i}}$, wenn i irgend eine zwischen 0 und $\frac{n}{2}$ liegende Grösse bezeichnet, werden wir bald auf ein einfaches Integral zurückführen.

III. Um das auf alle Lösungen mit positiven Werten $\lambda, \mu, \ldots$ eines polysphärischen Kontinuums vom Radius 1 sich erstreckende Integral

$$S = \int \int_{0}^{1} f\left(\frac{1 - r^2}{r^2 \varDelta} \right) \psi (r\lambda, r\mu, \ldots r\omega)\, r^{n-3}\, dr\, \frac{d\sigma}{\varDelta}$$

zu verwandeln, setzen wir $\frac{1 - r^2}{r^2 \varDelta} = u$, also $r = (1 + u\varDelta)^{-1/2}$ und erhalten

$$S = \frac{1}{2}\int_0^\infty \int \psi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+u\Delta}}, \frac{\mu}{\sqrt{1+u\Delta}}, \dots\right) \frac{d\sigma}{(1+u\Delta)^{\frac{n}{2}}} \cdot f(u)\, du.$$

Durch Anwendung der Gleichung (2) ergiebt sich hieraus

$$S = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\int \psi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{1+\frac{u}{A}}}, \frac{\mu}{\sqrt{1+\frac{u}{B}}}, \dots\right) d\sigma\right) \frac{f(u)\, du}{\sqrt{\left(1+\frac{u}{A}\right)\left(1+\frac{u}{B}\right)\cdots}} \quad \dots \quad (3)$$

IV. Gehen wir zu speziellen Umwendungen dieser Formel über und setzen $\psi(x, y, \dots w) = x^{2\alpha-1} y^{2\beta-1} \dots w^{2\varepsilon-1}$, so bekommen wir vermöge (1) die Gleichung

$$\int\int_0^1 f\left(\frac{1-r^2}{r^2\Delta}\right) r^{2(\alpha+\beta\dots+\varepsilon)-3}\, dr \,.\, \lambda^{2\alpha-1}\mu^{2\beta-1}\dots\dots\bar{\omega}^{2\varepsilon-1}\frac{d\sigma}{\Delta}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\dots\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\alpha+\beta+\dots+\varepsilon)} \int_0^\infty \frac{f(u)\, du}{\left(1+\frac{u}{A}\right)^\alpha \left(1+\frac{u}{B}\right)^\beta \cdots \left(1+\frac{u}{J}\right)^\varepsilon}.$$

Die Funktion $f(u)$ unterliegt hier gewissen Bedingungen; sie muss von $u = 0$ bis $u = \infty$ kontinuierlich sein, und für ein verschwindendes u muss sich $u f(u)$ wie eine Potenz von u mit positiven Exponenten, für ein unendlich wachsendes u dagegen muss sich $u f(u) : u^{\alpha+\beta+\dots+\varepsilon}$ wie eine solche Potenz mit negativen Exponenten verhalten. Nimmt man $f(u) = u^{i-1}$ an, so ist links das Integral

$$\int_0^1 (1-r^2)^{i-1}\, r^{2(\alpha+\beta+\dots+\varepsilon)-2i-1}\, dr = \frac{1}{2}\, \frac{\Gamma(i)\,\Gamma(\alpha+\beta+\dots+\varepsilon-i)}{\Gamma(\alpha+\beta+\dots+\varepsilon)}.$$

Man hat also endlich

$$\int \frac{\lambda^{2\alpha-1}\mu^{2\beta-1}\dots\dots\bar{\omega}^{2\varepsilon-1}}{\left(\frac{\lambda^2}{A}+\frac{\mu^2}{B}+\dots+\frac{\bar{\omega}^2}{J}\right)^i}\, d\sigma = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\dots\dots\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(i)\,\Gamma(\alpha+\beta+\dots+\varepsilon-i)} \int_0^\infty \frac{u^{i-1}\, du}{\left(1+\frac{u}{A}\right)^\alpha\left(1+\frac{u}{B}\right)^\beta\cdots}. \quad (4)$$

Diese Gleichung gilt nur für positive Werte von $\alpha, \beta, \dots \varepsilon$ und für $0 < i < \alpha+\beta+\dots+\varepsilon$. Für $i = 0$ tritt die Formel (1) an deren Stelle, und für $i = \alpha+\beta+\dots+\varepsilon$ erhält man durch Anwendung der Formel (2):

$$\int \frac{\lambda^{2\alpha-1}\mu^{2\beta-1}\dots\dots\bar{\omega}^{2\varepsilon-1}}{\left(\frac{\lambda^2}{A}+\frac{\mu^2}{B}+\dots+\frac{\bar{\omega}^2}{J}\right)^{\alpha+\beta+\dots+\varepsilon}}\, d\sigma = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\dots\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\alpha+\beta+\dots+\varepsilon)}\, A^\alpha B^\beta \dots J^\varepsilon.$$

Setzt man in (4) $\beta = \gamma = \cdots = \varepsilon = \frac{1}{2}$, und erstens $\alpha = \frac{1}{2}$, zweitens $\alpha = \frac{3}{2}$, so erhält man die zwei Formeln

$$\int \frac{d\sigma}{\left(\frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \cdots\right)^i} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(i)\,\Gamma\left(\frac{n}{2} - i\right)} \int_0^\infty \frac{u^{i-1}\,du}{\sqrt{\left(1 + \frac{u}{A}\right)\left(1 + \frac{u}{B}\right)\cdots\left(1 + \frac{u}{J}\right)}},$$

$$\int \frac{\lambda^2\,d\sigma}{\left(\frac{\lambda^2}{A} + \frac{\mu^2}{B} + \cdots\right)^i} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(i)\,\Gamma\left(\frac{n}{2} - i + 1\right)} \int_0^\infty \frac{u^{i-1}\,du}{\left(1 + \frac{u}{A}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{u}{A}\right)\left(1 + \frac{u}{B}\right)\cdots\left(1 + \frac{u}{J}\right)}},$$

wo nunmehr die Integrale links sich über das ganze polysphärische Kontinuum erstrecken. Setzt man $i = 1$, so ergeben sich die in § 49 gebrauchten Reduktionen.

Setzt man in (4) $\lambda = \frac{x}{\sqrt{A}}$, $\mu = \frac{y}{\sqrt{B}}$, $\ldots\, \tilde{\omega} = \frac{w}{\sqrt{J}}$, so ist $\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \cdots + \frac{w^2}{J} = 1$, und das Integral links erstreckt sich über denjenigen Teil eines quadratischen Kontinuums, wo alle Variabeln zugleich positive Werte haben. Nach der üblichen Bezeichnung wird dann

$$\int^{n-1} \Phi \,.\, \prod_{m=2}^{m=n} \left(\frac{A_m^{\alpha-1}\, B_m^{\beta-1} \ldots J_m^{\varepsilon-1}}{(A - A_m)^i}\, dA_m\right)$$

$$= \frac{\Pi\,.\,(A - B)^{\alpha+\beta-1}}{(A\,B\,C\ldots J)^i}\, \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\ldots\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(i)\,\Gamma(\alpha + \beta + \cdots + \varepsilon - i)} \int_0^\infty \frac{u^{i-1}\,du}{\left(1 + \frac{u}{A}\right)^\alpha \left(1 + \frac{u}{B}\right)^\beta \cdots}, \quad (6)$$

wo links unter den Axenquadraten $A_m, B_m, \ldots J_m$ die $m - 1$ letzten entgegengesetzt zu nehmen sind, damit alle positiv erscheinen, und wo $\Phi = (A_2 - A_3)(A_2 - A_4)\ldots(A_2 - A_n) \times \cdots \times (A_{n-1} - A_n)$, wo ferner rechts das Produkt $\Pi\,.\,(A - B)^{\alpha+\beta-1}$ so viele Faktoren zählt, als die Grössen $A, B, C, \ldots J$ zu zweien kombiniert werden können. Die linke Seite zerfällt in ein Aggregat von Produkten von je $n - 1$ einfachen und vollständigen Integralen.

Richtet man für $n = 3$ die Exponenten α, β, γ, i so ein, dass vollständige elliptische Integrale herauskommen, so scheint trotz aller noch möglichen Mannigfaltigkeit immer nur die bekannte Legendre'sche Relation, $F(k)\,E(k') + F(k')\,E(k) - F(k)\,F(k') = \frac{\pi}{2}$, aus (6) hervorzugehen. Setzt man z. B. $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$, $i = 1$, $\sqrt{\frac{B - C}{A - C}} = k$, $\sqrt{\frac{A - B}{A - C}} = k'$, $\frac{C}{A} = \cos^2\theta$, und bezeichnet das vollständige elliptische Integral dritter Art $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + n\sin^2 x} \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 x}}$ durch $\Pi(n, k)$, so verwandelt sich (6) zunächst in

$$\frac{1}{\cos^2\theta}\,\Pi(k^2\operatorname{tang}^2\theta, k)\,F(k') - \Pi(-k'^2\sin^2\theta, k')\,F(k) = \frac{\frac{\pi}{2}\operatorname{tang}\theta}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\theta}}\,F(k', \theta).$$

Substituiert man aber hier für die Funktion Π ihre durch elliptische Integrale der zwei ersten Arten ausgedrückten Werte, so erhält man nur:

$$F(k', \theta)\left\{F(k)\,E(k') + F(k')\,E(k) - F(k)\,F(k') - \frac{\pi}{2}\right\} = 0.$$



Inhaltsübersicht.

Erster Teil. Lehre von den linearen Kontinuen.

Seite

1. Definitionen . . . 6
2. Orthogonale Transformation der Variabeln . . . 9
3. Ueber den Winkel zweier Richtungen . . . 10
4. Anwendung der orthogonalen Transformation zum Beweise des Satzes, dass der Strahl der kürzeste Weg sei zwischen zwei auf ihm befindlichen Lösungen . . . 11
5. Mass des Paralleloschems . . . 11
6. Ueber schiefe Systeme . . . 15
7. Mass der Pyramide . . . 15
8. Mass der Pyramide, ausgedrückt durch ihre $\frac{1}{2} n (n-1)$ Kanten . . . 17
9. Anwendung von § 6 auf die Verwandlung vielfacher Integrale . . . 18
10. Ueber Polyscheme . . . 19
11. Berechnung des Masses eines Polyschems . . . 21
12. Ueber die Projektionen eines linearen m-fachen Kontinuums, wenn m zwischen 1 und $n-1$ liegt 22
13. Mass eines m-fachen höhern Kontinuums . . . 26
14. Orthogonale Transformation der Projektionen eines linearen Kontinuums . . . 27
15. Ueber das Verhalten linearer Kontinua zu einander . . . 29
16. Ueber die Zahl der Teile, in welche die n-fache Totalität durch eine beliebige Menge $(n-1)$-facher linearer Kontinua geteilt wird . . . 39
17. Reguläre Polyscheme der vierfachen Totalität . . . 42
18. Reguläre Polyscheme der fünffachen und aller mehrfachen Totalitäten . . . 53

Zweiter Teil. Lehre von den sphärischen Kontinuen.

19. Einleitung. Begriffe der Polysphäre, Mass derselben und ihres Umschlusses . . . 57
20. Gegenseitige Abhängigkeit der Stücke eines sphärischen Plagioschems . . . 60
21. Hülfssatz . . . 64
22. Mass eines sphärischen Plagioschems . . . 65
23. Plagioschematische Funktionen; reduzierbare Fälle von Orthogonalität . . . 68
24. Reduktion der perissosphärischen Plagioscheme auf artiosphärische . . . 70
25. Zerlegung der Plagioscheme in Orthoscheme . . . 74
26. Reduktion der perissosphärischen Orthoscheme auf artiosphärische . . . 85
27. Perioden artiosphärischer Orthoscheme . . . 88
28. Anwendung des Vorigen auf die Bestimmung artiosphärischer Orthoscheme in einigen besonderen Fällen . . . 93
29. Ueber das Orthoschem $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \cdots \frac{\pi}{3}, \alpha, 2\alpha, \alpha, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \cdots \frac{\pi}{3}\right)$ . . . 98
30. Rationale tetrasphärische Orthoscheme, deren Argumente rationale Teile von π sind . . . 101

Seite

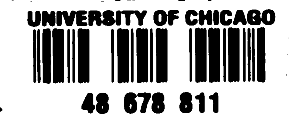
31. Ueber das Orthoschem $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \cdots \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \alpha, \alpha, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \cdots \frac{\pi}{3}\right)$ und einige mit diesem und dem in § 29 betrachteten in Beziehung stehende Sätze 103
32. Ueber sphärische Polyscheme. (Differential eines Polyschems, Zahl seiner Bestimmungsstücke, Reduktion eines perissosphärischen Polyschems auf artiosphärische, neuer Beweis der Formel $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 2$, Summe zweier reziproker tetrasphärischer Polyscheme) . . 106
33. Ueber reguläre sphärische Polyscheme 116
34. Nähere Untersuchung der Hexakosioscheme 120
35. Ueber die Summe der Quadrate der Projektionen eines Strahls auf symmetrisch verteilte Richtungen 134

Dritter Teil. Verschiedene Anwendungen der Theorie der vielfachen Kontinuität, welche das Gebiet des Linearen und Sphärischen übersteigen.

36. Bestimmung des Zentrums eines quadratischen Kontinuums 140
37. Bestimmung der Hauptaxen 141
38. Konjugierte Halbmesser 145
39. Berührende Kontinua ersten Grades 151
40. Bestimmung der Hauptaxen eines diametralen Schnitts. Definition der konfokalen Kontinua 154
41. Fortsetzung der Theorie der konfokalen Kontinua 157
42. Reduzierte Form der Differentialgleichung zweiter Ordnung eines höhern Kontinuums . . 164
43. Ueber orthogonale Kontinua überhaupt und über die Hauptkrümmungen eines quadratischen Kontinuums 171
44. Allgemeine Betrachtungen über die Existenz orthogonaler Kontinua; Konstruktion eines ganz beliebigen Systems orthogonaler Flächen im Raume 176
45. Anwendung der konfokalen Kontinua auf die Bestimmung des Masses der durch ein quadratisches Kontinuum begrenzten Totalität und des begrenzenden Kontinuums selbst. Relationen zwischen vollständigen Abelschen Integralen 191
46. Bestimmung des kürzesten Weges sowohl in der Totalität als auch auf einem quadratischen Kontinuum oder dem Durchschnitte mehrerer konfokaler Kontinua 196

47. Ueber die Verwandlung des Differentialparameters mittelst orthogonaler Funktionen . . 207
48. Ueber das Potential 211
49. Bestimmung des Potentials der von einem quadratischen Kontinuum erster Gattung umschlossenen homogenen Totalität 214
50. Ueber eine Verteilung von Masse auf einem quadratischen Kontinuum erster Gattung, welche zugleich mit ihrem Potential bekannt ist 220
51. Anwendung des Vorigen auf die Bestimmung des Potentials der von einem quadratischen Kontinuum umschlossenen homogenen Totalität 227
52. Ueber die algebraischen Lösungen der Gleichung $\frac{\partial^2 P}{\partial q^2} = MP$ 229
53. Darstellung gewisser arbiträrer Funktionen von $n-1$ unabhängigen Variablen . . . 231

54. Reduktion einiger vielfachen Integrale auf einfache 232


UNIVERSITY OF CHICAGO
48 678 811


U of Chicago
48678811